Universidad Zaragoza

1542

TRABAJO DE FIN DE GRADO
GRADO EN FÍSICA

Efectos observables de una deformación de la cinemática de Relatividad Especial en la producción de nuevas partículas

AUTOR:

Pablo Usán Sanz

DIRECTORES:

José Luis Cortés
José Javier Relancio

Facultad de Ciencias
Zaragoza, 5 de febrero de 2020

Índice general

Motivaciones y objetivos

A lo largo de este trabajo, estudiaremos los motivos teóricos para considerar una deformación de la cinemática de Relatividad Especial (SR) basada en la no conmutatividad del espacio-tiempo, que en última instancia se traduce en una ley de composición de momentos no conmutativa. Para ello, consideraremos que esta ley de composición modificada (MCL) rige los procesos de interacción entre partículas, particularizando nuestro estudio a la formación del bosón Z a partir de la colisión electrón/positrón.

En el primer capítulo detallaremos las motivaciones que nos llevan a considerar una deformación de la Relatividad Especial caracterizada por una escala de alta energía, que normalmente se asocia con la escala de Planck, $E_p \approx 10^{19}$ GeV, si bien esta podría ser mucho menor.

En el segundo y tercer capítulo mostraremos el cálculo de la sección eficaz del proceso $e^-e^+ \to Z \to \mu^-\mu^+$ con una MCL considerada en la literatura, observando variaciones en la posición del pico en la sección eficaz en función de la escala energética Λ considerada.

Por último, se mostrarán las conclusiones a las que se ha llegado tras el trabajo y se discutirán, dada la capacidad de los experimentos actuales, las posibles implicaciones fenomenológicas que podrían dar (o quitar) validez a una teoría más allá de Relatividad Especial (BSR).

Abreviaturas

A modo de facilitar la lectura del trabajo presentamos a continuación las abreviaturas utilizadas a lo largo de éste.

(1) SR: Special Relativity (Relatividad Especial)

(2) MCL: Modified Composition Law (Ley de Composición Modificada)

(3) BSR: Beyond Special Relativity (Más allá de Relatividad Especial)

(4) GZK (limit): Límite Greisen-Zatsepin-Kuzmin

(5) LHC: Large Hadron Collider (Gran Colisión de Hadrones)

(6) LIV: Lorentz Invariance Violation (Violación de invariancia Lorentz)

(7) DSR: Doubly Special Relativity (Relatividad Doblemente Especial)

(8) QFT: Quantum Field Theory (Teoría Cuántica de Campos)

(9) CPT (symmetry): Charge, Parity and Time Reversal Symmetry (Simetría CPT)

(10) SM: Standard Model (Modelo Estándar)

(11) SME: Standard Model Extension (Extensión del Modelo Estándar)

(12) LEP: Large Electron-Positron Collider (Gran Colisionador electrón-positrón)

Capítulo 1

Física más allá de Relatividad Especial

1.1. Introducción

La Relatividad Especial es uno de los pilares fundamentales de la física, y su validez ha sido demostrada a lo largo de sus más de 100 años de historia mediante infinidad de experimentos. Fue la sucesora de la relatividad galileana, descartada esta última al no compatibilizar con experimentos como el de Michelson-Morley o al no poder explicar la invariancia de las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, a día de hoy nos preguntamos si, de forma análoga a como ocurrió hace más de un siglo, debemos ir más allá. Observaciones de rayos cósmicos con energías cercanas al límite GZK [1, 2] podrían ser clave para mostrar la necesidad de una teoría BSR. Además, la ausencia de una formulación cuántica de la gravedad nos hace pensar que es necesaria una modificación de los postulados de la Relatividad Especial.

En primer lugar hemos de dejar claro que, actualmente, la Relatividad Especial no presenta inconsistencias en su planteamiento. Es un ingrediente fundamental de las teorías cuánticas de campos, que nos proporcionan un marco teórico para la descripción de las interacciones entre partículas. Por tanto, ¿por qué intentar ir más allá? El primer inconveniente se nos presenta cuando tratamos de unificar la gravedad con la Teoría Cuántica de Campos. Este hecho se tratará con más detalle en la sección 1.3.

Se estima [3] que, en caso de existir deformaciones de la cinemática SR, estas deberían ocurrir a una escala de energía similar a la de Planck, es decir, $\Lambda \sim E_P \approx 1{,}2 \cdot 10^{19}$ GeV. Para estos valores energéticos, el espacio-tiempo dejaría de ser continuo, rompiéndose así la simetría de Poincaré. De esta manera, la Relatividad Especial sería una aproximación solo válida para energías por debajo de la escala de Planck. Si comparamos estos valores con los máximos alcanzados en aceleradores de partículas (LHC, $E_{max} = 14$ TeV) caemos en la cuenta de que es vital invertir en un desarrollo tecnológico que nos permita alcanzar energías mucho mayores de las que disponemos hoy en día. Sin embargo, tenemos otra fuente de energía mucho mayor: la astronómica. Observaciones de los rayos cósmicos de alta energía ($E_\gamma \approx 10^{11}$ GeV) podrían sernos de gran utilidad a la hora de encontrar desviaciones respecto a SR.

En el siguiente apartado veremos dos formas distintas de enfocar una deformación de la cinemática SR: una basada en la violación de la invariancia Lorentz (LIV), y otra basada en la adición de una nueva escala fundamental de energías, además de la velocidad de la luz c, conocida como Relatividad Doblemente Especial (DSR).

1.2. Candidatos a una teoría BSR

1.2.1. Violación de la invariancia Lorentz (LIV)

La Relatividad Especial postula la invariancia Lorentz como una simetría de la Naturaleza, cuya validez ha sido comprobada a lo largo de la historia en múltiples ocasiones. No obstante, el intento de unificar la gravedad con una QFT podría dar lugar a una posible violación Lorentz para energías cercanas a la de Planck. Los marcos teóricos en los que se suele encajar esta idea implican la existencia de un observador privilegiado, rompiendo así con el principio de relatividad, que establece que las leyes de la física son las mismas para todo observador inercial.

Una forma de tratar esta violación de la invariancia Lorentz es considerar una relación de dispersión deformada con respecto a la de SR, pero manteniendo la conservación de energía-momento [3]. Suponiendo unidades naturales ($c = 1$), que usaremos a lo largo de toda la memoria, ahora ya no tendríamos que $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$, sino que E^2 sería una función distinta de la masa y el momento, es decir, $E^2 = F(\vec{p}, m)$. Otro punto fundamental de esta teoría LIV es la existencia de un observador privilegiado. Por lo general, se hace coincidir este con un observador en reposo respecto del fondo de microondas.

Cabe señalar que la modificación de la relación de dispersión se puede incorporar de modo consistente a nivel cuántico considerando una extensión de la teoría cuántica de campos relativista de las interacciones entre partículas, es decir, del lagrangiano del Modelo Estándar (SM), que incluye operadores que rompen la invariancia Lorentz y la simetría CPT, conocida como Modelo Estándar extendido (SME)[4].

1.2.2. Relatividad Especial Deformada (DSR)

Formulada por Amelino-Camelia [5], es una modificación de la Relatividad Especial basada en la existencia de una longitud mínima, ℓ_p, independiente del observador. Sin embargo, destaca el hecho de que no es necesaria la existencia de un observador privilegiado para que se pueda dar este fenómeno, pudiéndose implementar unas transformaciones de Lorentz. De esta manera, tendríamos un espacio tiempo gobernado por dos escalas independientes: la longitud de Planck ℓ_p y la velocidad de la luz en el vacío c.

Podemos enunciar los postulados de esta nueva teoría simplemente reescribiendo los de Relatividad Especial de forma que sean consistentes con la introducción de una nueva escala:

1. Las leyes de la física son las mismas para todos los sistemas de referencia inerciales.

2. Las leyes de la física, y en particular las de transformación entre sistemas inerciales, involucran una longitud fundamental (independiente del observador) L_{DSR}, considerada (normalmente) del orden del ℓ_p.

3. Las leyes de la física, y en particular las de transformación entre sistemas inerciales, involucran una velocidad independiente del observador c, que puede ser medida por cada observador como la velocidad de la luz con longitud de onda $\lambda \gg L_{DSR}$.

Vemos que mantenemos intacto el Principio de Relatividad (Postulado 1), a la vez que introducimos uno que defina la nueva escala (Postulado 2) y redefinimos la escala de velocidades (Postulado 3). A día de hoy ninguna teoría cuántica es consistente con estos principios, siendo plausible que en dicha teoría las simetrías se realicen a través de álgebras de Hopf (extensiones de álgebras de Lie)[6].

Hemos de destacar que, dado que no tenemos ningún resultado experimental que apoye la existencia de una longitud fundamental, el postulado 2 es puramente teórico. De hecho, se considera que, aun siendo cierto que una teoría DSR jugara un papel fundamental en la Naturaleza, su formulación correcta podría ser diferente a las propuestas actuales. Esta teoría se basa en dos pilares fundamentales: la introducción de una relación de dispersión modificada (MDR) y la deformación de la ley de composición respecto de la de SR (MCL). Aunque inicialmente se consideró que una MDR podría ser una forma fundamental de tener en cuenta un escenario DSR, si queremos mantener un principio de Relatividad debemos introducir una ley de composición modificada. Por tanto, los siguientes dos apartados no son sino dos ingredientes para tratar una teoría DSR.

Relación de dispersión modificada (MDR)

De forma general, podemos escribir una relación de dispersión modificada de la siguiente manera:

$$E^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2 + f(E, \vec{p}, m; \ell_p) = 0. \tag{1.1}$$

Eligiendo adecuadamente la perturbación f podemos conseguir que la longitud ℓ_p sea la misma para cualquier observador inercial sin que exista uno privilegiado. Podemos ver una analogía con la introducción de c como una velocidad fundamental a la hora de explicar los fenómenos electromagnéticos sin tener que recurrir a la existencia de un observador privilegiado. Un posible ejemplo para este tipo de teoría DSR sería el propuesto por Magueijo-Smolin [7].

Ley de composición modificada (MCL)

Otro factor crucial en una teoría DSR es considerar una ley de composición de momentos que difiera de la de Relatividad Especial. De forma general, podemos definir una ley de composición como sigue: sean p y q elementos de un mismo conjunto $\mathcal{P}$. Su composición vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \oplus : \mathcal{P} \times \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P} \\ (p, q) &\rightarrow p \oplus q. \end{aligned} \tag{1.2}$$

En Relatividad Especial, esta ley de composición es lineal, y corresponde simplemente con la suma de momentos, es decir, $p \oplus q \equiv p + q$. Sin embargo, si estamos trabajando en un escenario deformado, necesitamos una ley de composición no lineal para que una ley de conservación basada en la composición de momentos sea invariante bajo *boosts* no lineales. Si tenemos una ley de composición no conmutativa, $p \oplus q \neq q \oplus p$, sabemos que no existe forma de, mediante un cambio no lineal de variables momento, convertir la ley de composición en suma. De esta manera, estamos seguros de que no estamos considerando un escenario de SR pero con variables momento diferentes de las que transforman linealmente.

Podemos hacer una interpretación algebraica de lo que supone trabajar con una DSR basada en una MCL si consideramos que viene regida por una deformación del álgebra de Poincaré, denominada álgebra de κ-Poincaré [8].

Por qué MDR y MCL no son excluyentes

Como hemos indicado con anterioridad, inicialmente se consideró el modificar la relación de dispersión de Relatividad Especial como el único ingrediente necesario para tratar un escenario relativista deformado [9, 10]. No obstante, esto no es así.

En Relatividad Especial, sabemos que la no existencia de un observador privilegiado implica que podemos representar las transformaciones de Lorentz sobre las variables momento de modo que si satisfacen la relación de dispersión y las leyes de conservación de energía-momento, las transformadas también lo harán. Si modificamos la relación de dispersión, la condición anterior requiere una transformación *no* lineal de las variables momento. Sin embargo, esto implica que la ley de conservación con una ley de composición no modificada no será invariante Lorentz, por lo que necesitamos una MCL para que siga siendo invariante bajo transformaciones no lineales.

1.2.3. Formalismo matemático para una teoría DSR

Así como en Relatividad Especial las transformaciones de Lorentz vienen descritas por el álgebra de Poincaré, Amelino-Camelia propuso que una teoría DSR podría ser tratada mediante una extensión de esta, la denominada álgebra de κ-Poincaré. El principal problema de este tipo de álgebra es su no linealidad, lo que hace que distintas bases relacionadas mediante transformaciones arbitrarias sean completamente equivalentes, al menos desde el punto de vista matemático. De forma general, esta clase de álgebra satisface los siguientes axiomas [11]:

(1) Mantiene la invariancia Lorentz.

(2) Las rotaciones sobre los momentos se efectúan de manera lineal.

(3) En el límite en el cual el parámetro de deformación $\kappa \to \infty$ recuperamos el álgebra de Poincaré.

(4) Las relaciones de conmutación entre rotaciones y *boosts* son las siguientes:

$$[M_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk} M_k, \quad [M_i, N_j] = i\varepsilon_{ijk} N_k, \quad [N_i, N_j] = -i\varepsilon_{ijk} M_k, \tag{1.3}$$

donde M_i son los generadores de las rotaciones y N_i los de los *boosts* (o transformaciones de Lorentz puras).

Un punto importante es determinar si una de estas bases ocupa un lugar preferente, o bien construir la teoría DSR de forma que la elección de la base sea libre. En el artículo [11] se trata con más detalle esta cuestión.

1.2.4. LIV vs. DSR

Una vez hemos definido ambas teorías, pasamos a discutir las principales diferencias que hay entre ellas, así como fallos estructurales comunes a ambas.

En primer lugar, no tenemos una descripción dinámica para ninguna teoría DSR, quedando así todas ellas incompletas. Por tanto, no podemos apoyarnos en experimentos que vengan descritos por la dinámica del sistema para darles (o restarles) validez, ya que éstos vienen descritos por la dinámica del sistema. Sin embargo, tan solo por el esfuerzo teórico que acarrean estas teorías son dignas de estudio. Es en LIV donde *sí* tenemos una descripción dinámica en la que enmarcar nuestras teorías, que no es más que el Modelo Estándar Extendido.

La principal diferencia entre ambas teorías es que en LIV requerimos de un observador privilegiado, quedando así obsoleto el principio de Relatividad. Por el contrario, en DSR mantenemos intacto este principio, modificando *solo* la relación de dispersión y la ley de composición de Relatividad Especial. No obstante, un gran inconveniente de estas teorías es la ausencia de un marco dinámico con el que trabajar. Así como la violación de invariancia Lorentz podemos enmarcarla dentro de un modelo SME, al no tener una teoría cuántica de campos que describa DSR nos vemos obligados a introducir una serie de prescripciones que nos permitan calcular la sección eficaz mediante una ligera modificación de los invariantes de Relatividad Especial. Todo esto será analizado con más detalle en el Capítulo 3.

Para finalizar este apartado, recordemos que ambas visiones de una teoría BSR llevan implícita una escala de energía Λ a la que tendría lugar la deformación, normalmente asociada con la energía de Planck. Es a energías cercanas a ésta donde los efectos de nueva física surgirían, discretizando el espacio-tiempo y entrando en juego la gravedad cuántica, tema que se tratará con más detalle en el siguiente apartado. El resto del trabajo se centrará en considerar la posibilidad de DSR con una escala de energías Λ muy por debajo de la escala de Planck.

1.3. Gravedad cuántica

Como ya hemos indicado anteriormente, el principal motivo para querer ir más allá de una teoría relativista es la ausencia de una unificación de los resultados de la Teoría Cuántica de Campos con los de Relatividad General, lo que conduciría a una Teoría Cuántica de la Gravedad. Ha habido numerosos intentos de hacerlo, tales como la teoría de cuerdas, la supergravedad, o la gravedad cuántica de bucles. Todas ellas coinciden en la idea de una longitud mínima, que se corresponde con la longitud de Planck:

$$\ell_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,62 \cdot 10^{-35} \text{ m.} \tag{1.4}$$

Esto sería equivalente a *discretizar* el espacio a escalas muy pequeñas. Podemos asociar esta longitud mínima con una energía de Planck, $E_p \approx 10^{19}$ GeV. Como hemos comentado con anterioridad, en caso de poder observar una violación de la invariancia Lorentz sería para valores cercanos a esta energía. El hecho de que esta longitud dependa tanto de la constante de Planck $\hbar$ como de la constante de gravitación universal G, y que sin embargo no se haya logrado desarrollar una teoría que unifique ambos campos, abre la puerta a pensar que podría ser necesaria una modificación en la SR. Además, la existencia de una longitud fundamental, i.e. independiente del sistema de referencia, entraría en conflicto directo con el principio de relatividad, lo que nos daría un motivo adicional para desarrollar una teoría BSR.

Una posible manera de tratar esto es estudiar la fenomenología de posibles violaciones de simetrías fundamentales, establecidas como exactas por la Relatividad Especial. Un ejemplo de esto sería la invariancia CPT, la cual está estrechamente relacionada con la invariancia Lorentz. En caso de hallar una violación de la simetría CPT, la invariancia Lorentz se rompería automáticamente. Nótese que la implicación inversa no es cierta: una violación de la invariancia Lorentz no implica una rotura de simetría CPT [3]. Hemos de tener en cuenta que una violación Lorentz no es una característica necesaria para obtener una teoría cuántica de la gravedad completa, pero es claro que cualquier relación que tuviera con la escala de Planck nos daría un buen marco teórico sobre el que trabajar.

Como ya indicamos en la sección 1.1, el principal problema a la hora de establecer una teoría QG es el experimental: supuesto que los efectos cuánticos aparecen a energías cercanas a la de Planck, con el estado actual de los aceleradores es imposible tener evidencias directas de una violación de la invariancia Lorentz. Si basamos nuestro estudio en los aceleradores de partículas, necesitaríamos energías similares a $E_P \sim 10^{19}$ GeV, las cuales superan en 15 órdenes de magnitud las conseguidas por el acelerador más potente en la actualidad, el LHC. Una posible solución a esto sería considerar la gravedad cuántica en un contexto cosmológico, debido a que las mayores energías conocidas fueron alcanzadas en la era de Planck.

Para tener una descripción completa de la teoría debemos encajarla con un marco dinámico. Una posibilidad es considerar, como ya se ha mencionado antes, una relación de dispersión modificada de la forma

$$E^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2 + f(\vec{p}, E_p; \Lambda), \tag{1.5}$$

donde m es la masa de la partícula, E su energía y f una función suave del momento $\vec{p}$ y de una escala de deformación Λ. Por simplicidad, asumiremos que la invariancia Lorentz se rompe tan solo para los *boosts*, manteniéndose intacta para las rotaciones. De esta manera, f ya no dependería del momento lineal vectorial, sino tan solo de su módulo, $|\vec{p}|$.

Para finalizar este apartado, podemos decir que el obtener una teoría de la gravedad cuántica es uno de los motivos principales para desarrollar una teoría BSR, concretamente una basada en la violación de invariancia Lorentz. No obstante, hemos de tener en cuenta que a día de hoy es imposible verificar la validez de estas teorías mediante los aceleradores actuales, ya que las energías a las que surgen los fenómenos gravitatorios cuánticos son muy superiores a las que se pueden alcanzar mediante métodos experimentales.

Capítulo 2

Conceptos previos

A lo largo de este capítulo vamos a ver cómo el introducir una deformación en la ley de composición de momentos respecto de SR modifica por completo la dinámica de un proceso de *scattering* entre dos partículas. En concreto, consideraremos una ley de composición modificada respecto a la de Relatividad Especial, pero manteniendo intacta la relación de dispersión, es decir,

$$E^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2.$$

2.1. Ley de composición modificada

Trabajaremos con la siguiente ley de composición [12]: sean p y q dos cuadrivectores. Definimos la MCL como:

$$[p \oplus q]_0 = p_0 + q_0 + \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\Lambda}, \tag{2.1}$$

$$[p \oplus q]_i = p_i + q_i + \frac{p_i q_0}{\Lambda}. \tag{2.2}$$

El subíndice 0 hace referencia a la componente correspondiente a la energía, mientras que los subíndices latinos indican las componentes del trimomento. Vamos a considerar como ejemplo para poder ilustrar las consecuencias de tener esa MCL el estudio de la producción, por un estado inicial de dos partículas, de una resonancia X, de masa M_X y anchura Γ_X y su posterior desintegración en un sistema de dos partículas. Sabemos [13] que en Relatividad Especial la sección eficaz para dicho proceso viene dada por:

$$\sigma = \frac{1}{2E_1 2E_2 |v_1 - v_2|} PS_2 \frac{1}{[(s - M_X^2)^2 + \Gamma_X^2 M_X^2]} A, \tag{2.3}$$

donde PS_2 es la integral al espacio de momentos y A el factor dinámico, que tiene en cuenta la producción y posterior desintegración de la resonancia X.

Trabajaremos bajo las siguientes suposiciones:

1. Consideraremos partículas ultrarrelativistas, es decir, de masa despreciable. De esta forma, podemos establecer de forma directa que $v_1 = -v_2 \equiv c$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío.

2. Trataremos el proceso desde el sistema de referencia de centro de masas. De esta forma, podemos definir los cuadrimomentos k_1 y k_2 como sigue:

$$k_1 = (E_0, \vec{k}) \qquad k_2 = (E_0, -\vec{k}), \tag{2.4}$$

   con $|\vec{k}| = E_0$.

Así pues, teniendo en cuenta lo anterior, podemos reescribir la ecuación (2.3) de la siguiente manera:

$$\sigma = \frac{1}{8E_0^2} PS_2 \frac{1}{[(s - M_X^2)^2 + \Gamma_X^2 M_X^2]} A. \tag{2.5}$$

2.2. Estudio del proceso $e^- e^+ \to Z$

El proceso en el que vamos a centrarnos en este trabajo es la reacción de producción del bosón Z mediador sin carga de las interacciones débiles. El porqué de esta elección es principalmente la gran precisión con la que se han calculado las dos magnitudes anteriores. Actualmente, experimentos desarrollados en el Large Electron-Positron collider (LEP) [14] estiman dichos valores, utilizando el SME, en

$$M_Z = 91,1876 \pm 0,0021 \text{ GeV} \quad , \quad \Gamma_Z = 2,4952 \pm 0,0023 \text{ GeV}. \tag{2.6}$$

Trabajamos bajo la premisa de que, en caso de que haya modificaciones debidas a efectos BSR, considerando como ejemplo la MCL en (2.1), (2.2), éstas deben ser muy pequeñas, por lo que necesitamos medidas muy precisas para detectar estas variaciones respecto de los resultados arrojados por SR.

Capítulo 3

Cálculo de la sección eficaz BSR

En este capítulo vamos a estudiar los efectos de considerar una MCL en la sección eficaz de producción de una resonancia por un sistema de dos partículas y su posterior desintegración a dos partículas, particularizando dicha sección eficaz al estado inicial de una pareja electrón-positrón, la producción del bosón Z y su desintegración en una pareja muón-antimuón.

3.1. Integral al espacio de momentos

En Relatividad Especial, para un proceso $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ la integral de fase toma la siguiente expresión:

$$PS_2^{SR} = \int \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - P), \tag{3.1}$$

donde p_3 y p_4 son los cuadrimomentos que determinan el estado final, y $P := p_1 + p_2$. Podemos reescribir esta expresión para que nos resulte más fácil trabajar con una ley de composición modificada. Haciendo uso de la propiedad de la δ de Dirac $d^3p/2E = d^4p\delta(p^2)\theta(p^0)$:

$$PS_2^{SR} = \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^4p_4}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - P)\delta(p_3^2)\theta(p_3^0)\delta(p_4^2)\theta(p_4^0). \tag{3.2}$$

Al reemplazar las sumas de momentos en el estado inicial y final por la MCL no conmutativa al ir BSR, tendremos (al menos en principio) una expresión para cada canal de desintegración, cada uno de los cuales lleva asociado una ley de conservación distinta. Supongamos un proceso genérico de la forma $p_1 \oplus p_2 = p_3 \oplus p_4$, siendo p_1 y p_2 los cuadrimomentos de las partículas incidentes. Por construcción de nuestra MCL, tanto p_1 como p_3 transforman linealmente, así como la suma de los momentos inicial y final [12]. De esta manera, el carácter no lineal de las transformaciones de Lorentz reside en la variable p_4. Bajo esta premisa, efectuamos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} p_3 &\to p_3 \\ p_4 &\to p_3 \oplus p_4 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.2) y aplicando propiedades de la δ de Dirac, llegamos a la siguiente expresión:

$$PS_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 p_3 \delta \left\{ [\hat{p}_3 \oplus (p_1 \oplus p_2)]^2 \right\} \delta(p_3^2) \theta \left([\hat{p}_3 \oplus (p_1 \oplus p_2)]^0 \right) \theta(p_3^0), \tag{3.3}$$

donde $\hat{p}_3$ es el cuadrimomento cuya composición con p_3 da cero, es decir, $\hat{p}_3 \oplus p_3 = 0$. A este elemento se le denomina *antípoda*. Se ha integrado a la variable p_4 utilizando la delta de Dirac de la conservación que lleva a reemplazar p_4 por $\hat{p}_3 \oplus (p_1 \oplus p_2)$.

Podemos obtener una expresión aún más reducida para la integral al espacio de fases del estado final. Por un lado, tenemos la siguiente propiedad de la δ de Dirac:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x^i)}{|f'(x^i)|}, \tag{3.4}$$

donde $\{x^i\}$ son las raíces de $f(x)$. Por otro lado, $p_3^2 = (p_3^0)^2 - |\vec{p}|^2 \equiv m^2$. Al estar tratando con partículas ultrarrelativistas, $m = 0$. Aplicando la propiedad de la δ-Dirac a la relación anterior podemos escribir

$$\delta(p_3^2) = \delta \left[(p_3^0)^2 - |\vec{p}_3|^2 \right] = \frac{\delta \left(p_3^0 - |\vec{p}_3| \right)}{2|\vec{p}_3|}. \tag{3.5}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (3.3) podemos integrar a la variable p_3^0 y se obtiene:

$$PS_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 |\vec{p}_3|}{2|\vec{p}_3|} \delta \left\{ [\hat{p}_3 \oplus (p_1 \oplus p_2)]^2 \right\}. \tag{3.6}$$

Pasamos a coordenadas esféricas: $d^3 |\vec{p}_3| = |\vec{p}_3|^2 \, d\,|\vec{p}_3| \, d(\cos\theta) d\varphi$. Dado que tenemos simetría respecto al plano donde tiene lugar la colisión de las partículas, el integrando no tendrá dependencia con la variable angular φ, obteniendo un factor 2π al integrar. Por lo tanto, y aplicando una nueva propiedad de la δ de Dirac,

$$\int \delta(f(x)) I(x) dx = \frac{I(x = x_0)}{|f'(x_0)|}, \tag{3.7}$$

llegamos finalmente a la expresión que nos permitirá determinar la integral al espacio de fases:

$$PS_2 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\cos\theta}{|\partial f / \partial\,|\vec{p}_3||} \, |\vec{p}_3| \,, \tag{3.8}$$

donde $f := [\hat{p}_3 \oplus (p_1 \oplus p_2)]^2$. Nótese que, debido a la propiedad (3.7), tanto $|\vec{p}_3|$ como $|\partial f/\partial |\vec{p}_3||$ estarán evaluados para la raíz de f.

Una vez hemos reescrito la integral al espacio de fases del estado final de dos partículas, pasamos a calcularla para cada uno de los canales de desintegración del proceso $e^- e^+ \to \mu^- \mu^+$. Dichos canales son:

$$\begin{aligned}
1: &\quad k_- \oplus k_+ = p_- \oplus p_+ \\
2: &\quad k_+ \oplus k_- = p_- \oplus p_+ \\
3: &\quad k_- \oplus k_+ = p_+ \oplus p_- \\
4: &\quad k_+ \oplus k_- = p_+ \oplus p_-
\end{aligned}$$

Todo el proceso ocurre en el mismo plano y, utilizando la libertad de elección del eje Z como eje de colisión, podemos asignar los siguientes cuadrimomentos:

$$k_\_ = (E_0, 0, 0, E_0), \quad k_+ = (E_0, 0, 0, -E_0), \quad p_\_ = (E_1, 0, E_1 \sin\theta, E_1 \cos\theta), \tag{3.9}$$

siendo θ el ángulo que forma $k_\_$ con $p_\_$. Para definir $p_\_$ hemos considerado $p_\_ = (|\vec{p}_\_|, \vec{p}_\_)$, es decir, $E_1 \equiv |\vec{p}_\_|$. Para cada canal tendremos una función f distinta, y el punto clave es determinar sus raíces.

Canales 1 y 2

Para estos canales tenemos la siguiente integral al espacio de fases:

$$PS_2 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\cos\theta}{|\partial f_i/\partial |\vec{p}_\_||} |\vec{p}_\_| \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\cos\theta}{|\partial f_i/\partial |E_1||} |E_1|, \tag{3.10}$$

donde

$$f_1 = [\hat{p}_\_ \oplus (k_\_ \oplus k_+)]^2, \quad f_2 = [\hat{p}_\_ \oplus (k_+ \oplus k_\_)]^2. \tag{3.11}$$

El cálculo de $k_\_ \oplus k_+$ y de $k_+ \oplus k_\_$ es directo: basta con aplicar nuestra ley de composición a los cuadrivectores $k_\_$ y k_+ definidos en (3.9). El resultado es:

$$(k_\_ \oplus k_+) = \left(E_0 \left(2 - \frac{E_0}{\Lambda}\right), 0, 0, \frac{E_0^2}{\Lambda}\right), \quad (k_+ \oplus k_\_) = \left(E_0 \left(2 - \frac{E_0}{\Lambda}\right), 0, 0, \frac{-E_0^2}{\Lambda}\right). \tag{3.12}$$

Para calcular la antípoda de $p_\_$ hacemos uso de su definición: $\hat{p}_\_ \oplus p_\_ = 0$. Esto nos da un valor de:

$$\hat{p}_\_ = \left(-\frac{E_1}{1 + \frac{E_1}{\Lambda}}, 0, -\frac{E_1 \sin\theta}{1 + \frac{E_1}{\Lambda}}, -\frac{E_1 \cos\theta}{1 + \frac{E_1}{\Lambda}}\right). \tag{3.13}$$

Por último, debemos calcular la composición de esta antípoda con la suma de momentos iniciales para los canales 1 y 2. Dado que lo que nos interesa es el cuadrado de esta magnitud, lo que hemos decidido llamar f_i para el canal i-ésimo, mostramos este valor directamente:

$$f_1 = \frac{2E_0(E_0(E_1+2\Lambda) - 2E_0^2 - 2E_1\Lambda + E_0E_1\cos\theta)}{\Lambda}, \tag{3.14}$$
$$f_2 = \frac{2E_0(E_0(E_1+2\Lambda) - 2E_0^2 - 2E_1\Lambda - E_0E_1\cos\theta)}{\Lambda}. \tag{3.15}$$

Denotando por $\tilde{E}_1^{(i)}$ el valor de E_1 que anula la función f_i, obtenemos los siguientes valores:

$$\tilde{E}_1^{(1)} = \frac{2E_0(E_0-\Lambda)}{E_0 - 2\Lambda + E_0\cos\theta}, \tag{3.16}$$
$$\tilde{E}_1^{(2)} = \frac{2E_0(E_0-\Lambda)}{E_0 - 2\Lambda - E_0\cos\theta}. \tag{3.17}$$

Evaluando la integral (3.10) para estos valores llegamos, junto con el factor dinámico A, a las expresiones que determinan la sección eficaz diferencial para los canales 1 y 2:

$$d\sigma_1 = \frac{\Lambda(E_0-\Lambda)}{(E_0 - 2\Lambda + E_0\cos\theta)^2}\frac{d(\cos\theta)}{4\pi}\cdot A, \tag{3.18}$$
$$d\sigma_2 = \frac{\Lambda(E_0-\Lambda)}{(E_0 - 2\Lambda - E_0\cos\theta)^2}\frac{d(\cos\theta)}{4\pi}\cdot A. \tag{3.19}$$

La cinemática de los dos canales está relacionada por el cambio $k_- \to k_+$ y, según lo visto en la expresión (3.9), $\vec{k}_- = -\vec{k}_+$. Podemos escribir el ángulo para un proceso general $k_1 + k_2 \to p_1 + p_2$ como

$$\cos\theta = \frac{\vec{k_1}\cdot\vec{p_1}}{|\vec{k_1}||\vec{p_1}|}, \tag{3.20}$$

Así pues, un intercambio $k_- \leftrightarrow k_+$ es equivalente a considerar un cambio $\vec{k}_1 \leftrightarrow \vec{k}_2 \equiv -\vec{k}_1$ en la expresión anterior, obteniendo así un término $-\cos\theta$. Vemos que las expresiones (3.18) y (3.19) satisfacen esta relación.

Canales 3 y 4

El paso lógico a seguir sería proceder del mismo modo para calcular las secciones eficaces diferenciales de los canales 3 y 4. Sin embargo, nos podemos ahorrar este cálculo si tenemos en cuenta las simetrías entre los cuatro canales de desintegración.

Para el canal 1 y 2 hemos de considerar el ángulo que forman k_- y k_+, respectivamente, con p_-. Esto se ve representado en la expresión (3.6). Valiéndonos de esta ecuación, para los canales 3 y 4 necesitamos el ángulo que forman k_- y k_+ con p_+. Es obvio que este ángulo no será el mismo θ que hemos utilizado para calcular $d\sigma_1$ y $d\sigma_2$, por lo que las secciones eficaces *diferenciales* de los canales 3 y 4 serán distintas. Sin embargo, estamos calculando la sección eficaz a partir del promedio de las secciones eficaces *totales* de los cuatro canales. Como veremos en la sección 3.3., éstas coinciden dos a dos con las de los dos primeros canales, por lo que no necesitamos obtener la forma explícita de $d\sigma_3$ y $d\sigma_4$.

3.2. Cálculo del factor dinámico

Una vez hemos obtenido la expresión para las secciones eficaces diferenciales pasamos a calcular el factor dinámico A, que determinará la probabilidad de transición entre el estado inicial y final. Esta magnitud, en el Modelo Estándar, toma la expresión

$$A = \frac{e^4}{2\sin^4\theta_w\cos^4\theta_w}\left(\left[C_V^2 + C_A^2\right]^2\left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2\right] - 4C_V^2C_A^2\left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \left(\frac{u}{2}\right)^2\right]\right), \tag{3.21}$$

donde C_V y C_A son las correcciones a la carga del vector débil y axial, respectivamente, y θ_w es el ángulo de Weinberg. t y u son dos de las variables de Mandelstam, las cuales en SR vienen dadas, para un proceso genérico $p_1 + p_2 \to p_3 + p_4$, por:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \tag{3.22}$$
$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \tag{3.23}$$
$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2. \tag{3.24}$$

Dado que tenemos una ley de composición modificada, debemos reescribir estas variables de forma que sigan representando magnitudes invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Las denotaremos como $\tilde{s}$, $\tilde{t}$ y $\tilde{u}$, indicando así que la suma de cuadrimomentos deberemos hacerla de acuerdo a nuestra nueva ley de composición. Recordemos que, bajo esta MCL, tanto p_1 como p_3 transforman linealmente en el canal 1, así como $p_1 \oplus p_2$ y $p_3 \oplus p_4$. Por tanto, resulta fácil ver que tanto $\tilde{s} = (p_1 \oplus p_2)^2$ como $\tilde{t} = (p_1 - p_3)^2$ representan invariantes. Para determinar $\tilde{u}$ hacemos uso de la relación entre las tres variables de Mandelstam, que supondremos mantiene la misma forma funcional que en SR, i.e.

$$\tilde{s} + \tilde{t} + \tilde{u} = \sum_i m_i^2, \tag{3.25}$$

donde m_i es la masa de la partícula i-ésima. Al estar considerando partículas relativistas, $m_i = 0$, por lo que podemos asignar $\tilde{u} = -\tilde{s} - \tilde{t}$. De esta forma ya tendríamos completamente determinado el factor dinámico para el primer canal, que con los invariantes modificados toma la siguiente expresión:

$$\tilde{A} = \frac{e^4}{2\sin^4\theta_w \cos^4\theta_w} \left(\left[C_V^2 + C_A^2\right]^2 \left[\left(\frac{\tilde{t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{u}}{2}\right)^2 \right] - 4C_V^2 C_A^2 \left[\left(\frac{\tilde{t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{u}}{2}\right)^2 \right] \right). \tag{3.26}$$

3.3. Sección eficaz total

La sección eficaz total vendrá dada por la suma de las contribuciones de cada canal, promediada por el número total de los mismos:

$$\sigma = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \sigma_i. \tag{3.27}$$

Dado que estamos trabajando con una ley de composición modificada, tenemos que adaptar la expresión de la sección eficaz para un proceso SR, ecuación (2.5), a nuestro proceso BSR. Para ello, basta con efectuar el cambio $s \to \tilde{s}$. Obtenemos así la sección eficaz para un proceso BSR:

$$\sigma = \frac{1}{8E_0^2\,(1 - E_0/\Lambda)} PS_2 \frac{1}{\left[(\tilde{s} - \tilde{M}_Z^2)^2 + \tilde{\Gamma}_Z^2 \tilde{M}_Z^2\right]} \tilde{A}. \tag{3.28}$$

Al tener una expresión modificada para la sección eficaz, la comparación de dicha sección eficaz con los experimentos dará lugar a una determinación experimental para la masa y la anchura del bosón Z diferente de la del SM. Para hacer manifiesta esta diferencia, hemos introducido la nueva notación $\tilde{M}_Z$, $\tilde{\Gamma}_Z$ para la masa y la anchura del bosón Z en el caso BSR.

Canales 1 y 2

Para estos dos canales, las variables de Mandelstam necesarias para calcular el factor dinámico tienen la siguiente expresión:

$$\tilde{t}_1 = -2E_0E_1(1 - \cos\theta), \quad \tilde{u}_1 = 2E_0 \left(-2E_0 + E_1 + \frac{2E_0^2}{\Lambda} - E_1\cos\theta \right), \tag{3.29}$$

$$\tilde{t}_2 = 2E_0 \left(-2E_0 + E_1 + \frac{2E_0^2}{\Lambda} + E_1\cos\theta \right), \quad \tilde{u}_2 = -2E_0E_1(1 + \cos\theta). \tag{3.30}$$

De esta manera, tenemos completamente determinado el factor dinámico. Así, sustituyendo este valor en las expresiones (3.18) y (3.19) e integrando a ángulo θ, obtenemos las secciones eficaces para los canales 1 y 2, que en este caso son idénticas. Por simplicidad la denominaremos σ_1.

$$\sigma_1 = \frac{e^4}{48\pi \sin^4\theta_w \cos^4\theta_w} \frac{E_0^2}{\left[\left(4E_0^2(1-E_0/\Lambda) - \tilde{M}_Z^2\right)^2 + \tilde{\Gamma}_Z^2 \tilde{M}_Z^2\right]} \left((C_V^2 + C_A^2)^2 \left[1 - \frac{E_0}{\Lambda}\right]\right). \tag{3.31}$$

Una manera de estimar si nuestros cálculos son correctos es comprobar que esta expresión se reduce a la de Relatividad Especial cuando $\Lambda \to \infty$. Es trivial calcular este límite, y vemos que efectivamente recuperamos la expresión para SR (ecuación (2.5)).

Canales 3 y 4

Como ya hemos comentado con anterioridad, las secciones eficaces diferenciales de los canales 3 y 4 difieren con respecto a las de los dos primeros, dado que el ángulo con el que trabajamos no es el mismo. No obstante, y aquí es donde radica el punto clave de nuestro cálculo, σ_3 coincidirá con σ_1, y de forma análoga σ_2 lo hará con σ_4.

Esto se debe a que, aunque trabajemos con un ángulo distinto para cada par de canales, la forma funcional de las secciones eficaces diferenciales será la misma, al menos angularmente hablando. Para calcular la sección eficaz total debemos integrar a todos los posibles estados finales. Por tanto, aunque las secciones eficaces diferenciales sean distintas, las secciones eficaces totales serán idénticas. Así,

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \sigma_1 \\ \sigma_4 &= \sigma_2. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Dado que $\sigma_1 = \sigma_2$, podemos determinar que la sección eficaz *total* es la misma para los cuatro canales. Denotándola como σ_T, tenemos la siguiente expresión para ella:

$$\sigma_T = \frac{e^4}{48\pi \sin^4\theta_w \cos^4\theta_w} \frac{E_0^2}{\left[\left(4E_0^2(1-E_0/\Lambda) - \tilde{M}_Z^2\right)^2 + \tilde{\Gamma}^2 \tilde{M}_Z^2\right]} \left((C_V^2 + C_A^2)^2 \left[1 - \frac{E_0}{\Lambda}\right]\right). \tag{3.33}$$

3.4. Cotas para la escala Λ

Una vez hemos calculado la expresión de la sección eficaz, hemos de determinar qué cotas impone ésta a nuestra escala energética Λ teniendo en cuenta los datos del Particle Data Group. Para ello, suponemos que existen unos valores para la masa y anchura del Z, $\tilde{M}$ y $\tilde{\Gamma}$ respectivamente, que no se desvían más de ± 40 MeV de los dados por el PDG.

Consideramos los valores máximos y mínimos que impone el Modelo Estándar a la sección eficaz para una y dos desviaciones estándar. Definiendo la cota mínima como el valor de Λ tal que $\sigma_{SR}^{\min} < \sigma_{BSR}(\Lambda) < \sigma_{SR}^{\max}$, obtenemos los resultados mostrados en la tabla 3.1, siendo el superíndice $\{1, 2\}$ el rango de error con el que hemos calculado la sección

Cotas	$\sigma^{(1)}$	$\sigma^{(2)}$
Λ [TeV]	67	61,5

Tabla 3.1: Cotas para la escala energética Λ a partir del ajuste a la sección eficaz total QFT.

Cotas	$\sigma^{(1)}$	$\sigma^{(2)}$
Λ [TeV]	2.2	1.8

Tabla 3.2: Cotas para la escala energética Λ mediante un ajuste a la sección eficaz total QFT, considerando la MCL descrita en [13].

eficaz.

Comparemos los valores de la tabla 3.1 con los resultados obtenidos en el artículo [13], donde se realiza el mismo cálculo pero con una ley de composición distinta. Dichos resultados se muestran en la tabla 3.2.

Vemos que en nuestro caso las restricciones son mayores, indicando que bajo nuestra MCL los efectos observables de una deformación de SR aparecerían a energías más altas. La razón por la que tiene lugar esta diferencia es que en el artículo se considera una deformación de Relatividad Especial a segundo orden, es decir, el invariante de masa modificado es proporcional a $1/\Lambda^2$, y no a $1/\Lambda$ como es nuestro caso. De esta manera, al hacer un desarrollo a orden mayor, se obtiene una menor restricción para la cota Λ.

Capítulo 4

Conclusiones

Existen numerosos trabajos académicos que consideran una nueva física más allá de Relatividad Especial. El elemento común en éstos es considerar esta *deformación* de SR observable a una escala energética cercana a la de Planck, del orden de 10^{16} TeV. Sin embargo, en el presente trabajo barajamos la posibilidad de que la escala a la que estos efectos puedan ser observables sea mucho menor. De esta manera, los efectos de deformación podrían ser observables mediante aceleradores de partículas, que actualmente alcanzan energías del orden de 10 TeV.

En el capítulo 1 se presentan los motivos para considerar una teoría BSR, así como dos posibles formalismos para estas teorías: uno de ellos basado en considerar un observador privilegiado (LIV), mientras que en el otro (DSR) se trabaja con una ley de momentos y relación de dispersión modificadas, manteniendo intacto el principio de Relatividad. Para finalizar este capítulo, se estudia la relación existente entre la física BSR y la gravedad cuántica, siendo ésta última una de las razones principales para considerar horizontes más allá de la física actual.

A lo largo de los capítulos 2 y 3 estudiamos un proceso de producción de una resonancia por un sistema de dos partículas y su posterior desintegración, calculando detalladamente la sección eficaz para dicho proceso y particularizándola a la producción del bosón Z mediante el proceso $e^-e^+ \to Z$. Obtenemos una expresión para la sección eficaz total en función de nuestra escala energética Λ que difiere de la de Relatividad Especial. Podemos destacar el hecho de que a la hora de calcular la sección eficaz nos aparecen cuatro canales de desintegración, ya que nuestra ley de composición de momentos no es conmutativa y hemos de tener en cuenta todas las combinaciones de estados iniciales y finales. Sin embargo, a la hora de obtener la sección eficaz vemos que, a pesar de que las secciones eficaces diferenciales son distintas para cada canal, el hecho de integrar a todos los posibles estados finales hace que la sección eficaz total sea la misma para los cuatro canales.

La consistencia de la expresión modificada de la sección eficaz de BSR con los datos de LEP sobre la producción del bosón Z nos ha llevado a la conclusión de que la escala de energías Λ de la modificación de SR ha de estar por encima de 60 TeV. Necesitaríamos considerar la producción de una posible resonancia cuya masa sea del orden o mayor que dicha escala para ver directamente los efectos de la MCL que hemos considerado en este trabajo. Actualmente, la mayor energía alcanzada en un acelerador de partículas se sitúa en torno a los 10 TeV y, por tanto, la producción de una resonancia con una masa del orden de nuestra escala energética está fuera del alcance de la siguiente generación de aceleradores. Sin embargo, existen otras fuentes de energía en las que nos podemos fijar para buscar los efectos observables de dicha MCL.

Una posibilidad para acceder a energías del orden de 100 TeV en un futuro próximo sería considerar aceleradores naturales en astrofísica. De hecho existen observaciones de rayos cósmicos de energías mucho mayores (del orden de 10^{20} eV $= 10^{8}$ TeV) aunque muy indirectas, lo cual hace problemático el poder identificar los efectos de una MCL. Hay observaciones más directas de neutrinos por encima de las cotas a la escala Λ, y recientemente se está alcanzando ese rango de energías en las observaciones de rayos gamma. Dichas observaciones abren la posibilidad de que puedan poner de manifiesto la presencia de una MCL si somos capaces de controlar las incertidumbres debidas al limitado entendimiento que tenemos de las fuentes.

Podemos concluir este apartado con la siguiente afirmación: aunque los resultados obtenidos a la hora de realizar este trabajo nos sugieran que no nos será posible observar, al menos en un futuro próximo y mediante la tecnología actual, deformaciones en Relatividad Especial, tan solo por el esfuerzo teórico que el estudio de estas teorías acarrea merece la pena proseguir con la investigación en este campo de Física BSR.

Bibliografía

[1] K. Greisen, *End to the cosmic ray spectrum?* Phys. Rev. Lett., 16:748–750 (1966).

[2] G. T. Zatsepin, V. A. Kuzmin, *Upper limit of the spectrum of cosmic rays* JETP Lett., 4:78–80. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.4,114] (1966).

[3] D. Mattingly, *Modern Tests of Lorentz Invariance* Living reviews in Relativity (2005).

[4] S. Liberati, L. Maccione, *Quantum Gravity phenomenology: achievements and challenges* (2010).

[5] G. Amelino-Camelia, *Doubly Special Relativity* [arXiv:gr-qc/0207049v1] (2002).

[6] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory* Cambridge University Press (1995).

[7] J. Kowalski-Glikman, S. Nowak, *Doubly Special Relativity theries as different bases of κ-Poincaré algebra.* (2008).

[8] S. Majid, H. Ruegg, *Bicrossproduct structure of κ-Poincaré group and nonconmmutative geomtry.* Phys. Lett., B334:348-354 (1994).

[9] G. Amelino-Camelia, *Testable scenario for Relativity with minimum-length* [hep-th/0012238] (2000).

[10] G. Amelino-Camelia, *Relativity in space-times with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale* [arXiv:gr-qc/0012051v2] (2000).

[11] J. Kowalski-Glikman, S. Nowak, *Non-conmutative space-time of Doubly Special Relativity theories* (2002).

[12] J. M. Carmona, J.L. Cortés, J. J. Relancio, *Beyond special relativity at second order*. Physical Review D 94 (8) 084008 (2016).

[13] G. Albalate, J. M. Carmona, J. L. Cortés, J. J. Relancio, *Twin Peaks: A possible signal in the production of resonances beyond Special Relativity* (2018).

[14] C. Patrignani, (Particle Data Group), Chi. Phys, C, 40 100001 (2016).