

# Topología de Rectas Proyectivas en el Espacio Proyectivo Real



**Mariano Abadía López**

Trabajo de fin de grado en Matemáticas  
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Enrique Artal Bartolo

25 de junio de 2018



# Índice general

<b>1. Definiciones y primeras propiedades</b>	<b>3</b>
1.1. Orientaciones y semi-orientaciones . . . . .	3
1.2. Número de enlace . . . . .	4
1.3. Conjuntos anfiqueirales y no-anfiqueirales . . . . .	5
1.4. Rectas e hiperboloides . . . . .	6
1.5. Fibraciones . . . . .	7
<b>2. Configuraciones de enlaces de rectas</b>	<b>9</b>
2.1. Dos y tres rectas . . . . .	9
2.2. Rectas isotópicas de un enlace. Enlace derivado. . . . .	10
2.3. Enlaces tipo <i>join</i> . . . . .	11
2.4. Cuatro y cinco rectas . . . . .	12
2.5. Números de enlace de ternas como invariante de enlaces . . . . .	13
2.6. Seis rectas . . . . .	14
<b>3. Grupo fundamental y trenzas</b>	<b>17</b>
3.1. Grupo fundamental . . . . .	17
3.1.1. Seifert-Van Kampen . . . . .	17
3.2. Grupo del complementario de un grafo acotado . . . . .	18
3.3. Grupo del complementario de un grafo no acotado . . . . .	21
3.3.1. Presentación de Wirtinger para rectas . . . . .	21
3.4. Trenzas . . . . .	23
3.4.1. Representación del <i>join</i> y del derivado de un enlace mediante trenzas . . . . .	24
3.5. Grupo fundamental en el espacio proyectivo. Polinomios de Alexander, de Jones y de Homfly . . . . .	25
3.6. Distinguir los enlaces $M$ y $M'$ de seis rectas. . . . .	27
<b>Bibliografía</b>	<b>29</b>
<b>Anexo A</b>	<b>31</b>
A.1. Tablas de Enlaces de 6 Rectas . . . . .	31
A.2. Trenzas y polinomios de Alexander de enlaces . . . . .	31
A.3. Algunas Demostraciones . . . . .	34
A.3.1. Demostración del Lema 1.6 . . . . .	34
A.3.2. Demostración del Teorema 1.11 . . . . .	35
A.3.3. Idea de la demostración del Teorema 3.5 . . . . .	35
A.4. Programas de Sagemath . . . . .	36



# Summary

The fundamental goal of this work is to understand the topological classification of skew line families in  $\mathbb{RP}^3$ . We are going to study families of up to six lines and we will discuss the procedures and the topological invariants that let us to prove that the classification is complete.

## Definitions and first properties

We defined the projective space  $\mathbb{RP}^n$  of  $n$  dimension as the set of vector lines in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Generalizing the classical construction of the projective plane as the extended affine plane,  $\mathbb{RP}^n$  is decomposed as  $\mathbb{R}^n \cup \mathbb{RP}^{n-1}$  (the affine space and the hiperplane at infinity). Particularly, a projective line decompose as  $\mathbb{R} \cup \mathbb{RP}^0$ , so they are homeomorphic the one point compatification in  $\mathbb{R}$ , i.e. to  $\mathbb{S}^1$ .

We will also need the concept of *orientability*, for both projective lines and projective space. In this work we define it rigorously, but for the case of lines or circles, the orientation has an obvious interpretation . So, an  $n$ -line link has  $2^n$  possible orientations.

The next important concept (for which we will need that the lines and  $\mathbb{RP}^3$  will be oriented) is the *linking number*. In this work we prove that the following definition does not depend on the many choices involved.

Given two lines  $L_1, L_2 \subset \mathbb{RP}^3$ , let us consider their intersection with a generic affine space  $\mathbb{R}^3$  such that the projected lines to  $\mathbb{R}^2$  are distinct.

**Definition 1.** The *linking number*  $\mathcal{L}(L_1, L_2)$  is  $+1$  if we perform an anti-clockwise rotation of the line that is above to the one below, in the shortest direction; in the clockwise case, this number is  $-1$ .

For a triple of lines, we define their linking number as the product of the linking number of the pairs of lines in the triple. Note that this product does not depend on the orientation of the lines.

Hyperboloids are ruled surfaces in  $\mathbb{RP}^3$  which will be very useful for the study of lines in  $\mathbb{RP}^3$ . After a coordinate change any hyperboloid  $H$  can be expressed in homogeneous coordinates  $[t : x : y : z]$  as

$$H = \{[t : x : y : z] \in \mathbb{RP}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + t^2\};$$

it will be also useful to considerate the solid hyperboloid (which is well-defined in homogeneous coordinates since the degree of the inequality is even):

$$V = \{[t : x : y : z] \in \mathbb{RP}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2 + t^2\}.$$

Given two skew lines  $l_1, l_2 \subset V$ , we can find an isotopy sending  $l_1 \rightsquigarrow l_{0,0}$  to the anima of  $V$  and  $l_2 \rightsquigarrow H$  to its boundary, or we can find an isotopy that sending both lines  $l_1, l_2 \rightsquigarrow H$  to the boundary. This is how hyperboloids and isotopic families of lines are related.

**Lemma 2.** Let  $r, s \subseteq \mathbb{RP}^3$  be disjoint lines.

- (i) There exist two fibrations  $\pi_{\pm} : \mathbb{RP}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  in such a way that  $r$  and  $s$  are fibers and we can to orient the fibers  $L_{\pm}$  from  $\pi_{\pm}$  such that their linking number  $\mathcal{L}(L_{\pm}, L'_{\pm})$  is  $\pm 1$ .

- (ii) Let  $t$  be a line isotopic to a  $\pi_{\pm}$ -fiber (respecting  $r, s$ ). For the case of  $\pi_+$ ,  $\pi_-(t)$  is a circle separating  $\pi_-(r), \pi_-(s)$  while  $\pi_+(t)$  is either a point or a circle which does not separate  $\pi_-(r), \pi_-(s)$  (an analogue statement holds if we switch  $\pi_+$  and  $\pi_-$ ).

If we make a link  $L \subseteq \mathbb{RP}^3$  projection with  $\pi_{\pm}$ ; after an isotopy, the lines of  $L$  which become fibers will be projected to points, while the others will be projected onto circles containing images of the other lines in the two discs they bound in  $\mathbb{S}^2$ .

## Classification of links of lines

It is easy to see that any two-line links are isotopic between them, so **there is only one two-line link**. In the Theorem 2.2 we will see that two triples are isotopic if and only if they have the same linking number. **There are only two different triples** and one is the mirror image of the other (so the image by a reversing-orientation homeomorphism).

To study the general case, we will use hyperboloids to study their structure.

**Definition 3.** Two lines  $l_1$  and  $l_2$  in a link  $\mathcal{L}$  are *isotopic* if, after an isotopy, we can find a solid hyperboloid  $V$  such that  $l_1, l_2 \subset V$  and  $\mathcal{L} \setminus \{l_1, l_2\} \cap V = \emptyset$ .

**Lemma 4.** *The isotopy of lines in a link  $\mathcal{L}$  is an equivalence relation.*

**Definition 5.** The resulting link by taking one line of each equivalence class is called *derived link*.

The derived link, with the signed number of lines in each equivalence class allow to recover, up to isotopy, the original link. If a link is composed by  $p$  equivalence classes  $A_1, \dots, A_p$ , each one with its corresponding hyperboloid, we will denote  $\langle \pm A_1, \dots, A_p \rangle$  according to  $\epsilon$  was  $+1$  or  $-1$ ; the sign is irrelevant in the first derivative if  $p = 2$ . The notation  $\langle \pm n \rangle$  corresponds to an  $n$ -line link, with one equivalence class and linking number  $\pm 1$ . Inductively, we can represent in this way the so-called *completely decomposable links*. Both three-line links (all of them are completely decomposable) are represented as  $\langle \pm 3 \rangle$ .

To study the four-line links, we will use their derived links and the fibrations. We will start with a sub-link of three lines and we will add the fourth line. As we will see in the work, we obtain **three different four-line links**:  $\langle \pm 4 \rangle$  y  $\langle \langle +2 \rangle, \langle -2 \rangle \rangle$ .

To study the five-line links we follow the same strategy, it becomes harder because a non-decomposable link appears; **there are seven different five-line links**.

To describe the six-line links, it is useful to considerate another general construction to produce links, named the *join*. We take two skew lines  $l$  and  $m$ , oriented, with linking number  $-1$ . We pick  $k$  points in each one of these lines denoted  $A_1, \dots, A_k$  y  $B_1, \dots, B_k$  respectively, following the orientation of the lines. Now we take a permutation  $\sigma$  of  $\{1, \dots, k\}$  and construct the lines  $A_i B_{\sigma(i)}$ .

In the six-line case, we only check that the links in Viro's classification are pairwise non-isotopic; to see this, we will introduce a new invariant, namely the number of triples with positive linking number. Two links with distinct number of positive triples are not isotopic. There are two link non-distinguished by this invariant, and this is why we must introduce more topological invariants.

## Fundamental group and braids

To find the expected invariants, we introduce the topological concept of *fundamental group* defined as the set of relative homotopy classes of loops based at a point (continuous maps from a closed interval starting and ending at the same point), where the product is defined by the sum of paths. Hence,  $\pi_1(X; x_0)$  is the fundamental group of  $X$  based on  $x_0$ . In a path-connected space, the isomorphism type of the group does not depend on  $x_0$  and sometimes we will omit it.

In the second part of the work, we compute the fundamental groups of the complement of the links we want to study. To compute these fundamental groups, we will use a generalized version of the *Seifert-van Kampen Theorem 3.6*.

**Theorem 6.** *Let  $X = Y \cup Z$  where  $Y, Z$  are path-connected and  $Z \cap Y = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_r$   $r \geq 0$  where  $A_i$  are the path-connected components of the intersection.*

*For each  $x_i \in A_i, i = 0, \dots, r$ , we fix continuous paths*

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{Y,i} : [0, 1] & \longrightarrow & Y & & \gamma_{Z,i} : [0, 1] & \longrightarrow & Z \\ 0 & \longmapsto & x_0 & & 0 & \longmapsto & x_0 \\ 1 & \longmapsto & x_i & & 1 & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Let us denote  $\eta_i := [\gamma_{Y,i} \cdot \gamma_{Z,i}^{-1}] \in \pi_1(X; x_0)$  (where  $\eta_0 = 1$ ). Then:

$$\pi_1(X; x_0) = \frac{\pi_1(Y; x_0) * \pi_1(Z; x_0) * \mathbb{Z}\eta_1 * \dots * \mathbb{Z}\eta_r}{\langle \gamma_{Y,i} i_Y(\alpha) \gamma_{Y,i}^{-1} = \eta_i \gamma_{Z,i} i_Z(\alpha) \gamma_{Z,i}^{-1} \eta_i^{-1} | \alpha \in \pi_1(A_i, x_i) \rangle}$$

With this result, we compute  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$  where  $\Gamma$  is a finite plane graph inducing a cellular decomposition of a topological disc  $D$ . We prove that the group is isomorphic to the free group  $\mathbb{F}_r$ , where  $r$  is the number of 2-cells in the decomposition of  $D$ . Also, this group is isomorphic to a group combinatorially constructed from  $\Gamma$  and  $D$  as follows. Let  $\mathcal{V} = \{\text{vertices of } \Gamma\}$ ,  $\mathcal{L} = \{\text{edges } \Gamma\}$  and  $\mathcal{R} = \{\text{faces of } D\}$ ; the incident edges in a vertice, has a counterclockwise cyclic orientation. We define the group taking a generator for each (oriented) edge and a relationship for each vertex:

$$G_\Gamma = \langle g_\ell, \ell \in \mathcal{L} | R_v, v \in \mathcal{V} \rangle,$$

where the relationships  $R_v$  is the product of the corresponding generators to each edges getting out from  $v$  with the cyclic order. One of the relations is consequence of the other ones. Thanks to this result, we will present a proof of Wirtinger Theorem, which computes the fundamental group of the complement a link in  $\mathbb{S}^3$ .

The previous result is extended when we add  $m$  rays to  $\Gamma$  (exterior half-lines based on vertices of  $\partial D$ ).

**Proposition 7.** *Let  $\Gamma_0 = \Gamma \cup \{m \text{ rays}\}$  be a non-compact graph where  $\Gamma$  is a compact graph as above (with  $r$  faces). Then:*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \cong \mathbb{F}_{r+(m-1)}$$

With the same techniques, we will can compute  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{L})$ , where  $\mathcal{L}$  is a skew line link. Using Seifert-van Kampen Theorem, we will extend this result to  $\mathbb{RP}^3 \setminus \mathcal{L}$ , adding relationships than came from *infinity*. In order to obtain a meaningful presentation of the group, it is convenient to introduce the braid group and its action on the free group. The braid group not only allows give a more compact presentation of the group  $\pi_1(\mathbb{RP}^3 \setminus \mathcal{L})$ , but it also allows to efficiently compute polynomial invariants as the *Alexander, Jones* or *HOMFLYPT* polynomials, that allow us to end the clasification of the *nineteen different six-line links*.



# Introducción

En este trabajo vamos a hacer una clasificación de conjuntos de rectas que se cruzan en el espacio proyectivo. Para esta clasificación lo único que nos va a interesar son las posiciones relativas de las rectas del conjunto, no nos vamos a fijar ni en los ángulos ni en las distancias entre ellas. Realizaremos un estudio topológico de dichos conjuntos (o enlaces) de rectas, en busca de algún invariante que nos diferencie unos de otros según sus características.

Para ver si un conjunto de rectas está relacionado con otro, miraremos si podemos conseguir uno de ellos a partir del otro mediante algún movimiento, de forma que en el proceso las rectas se mantengan disjuntas en todo momento. Como trabajaremos en el espacio proyectivo aunque nos fijemos en las trazas de las rectas en el espacio afín, ésto implica que las rectas tampoco pueden ser paralelas.

Si un conjunto de rectas lo podemos obtener a partir de otro mediante una isotopía, diremos que ambos conjuntos tienen el mismo encaje o que son *isotópicos*; en caso de no poder, diremos que el encaje es distinto o que son *no-isotópicos*.

La dificultad de determinar si dos conjuntos de rectas son o no isotópicos depende sobre todo del número de rectas de que componen los conjuntos, cuantas más rectas tienen, más difícil es encontrar una isotopía entre ellos. Para resolver este problema, nos basaremos en la idea que nos proponen Oleg y Julia Viro [10]. El caso de más rectas ha sido estudiado por otros autores [2]. Empezaremos por los casos más sencillos (conjuntos de 2 rectas) e iremos aumentando la dificultad a la vez que iremos encontrando herramientas que nos permitan trabajar con los conjuntos de forma más sencilla.

También estudiaremos las propiedades topológicas de las configuraciones clasificadas, en particular calcularemos el *grupo fundamental* del espacio resultante de considerar el complementario del conjunto de rectas a estudiar en el espacio proyectivo, así como otros espacios asociados, como la preimagen de las rectas por la cubierta universal del espacio proyectivo (es un enlace en la esfera tridimensional), para el cual calcularemos los *polinomios de Alexander multivariantes* y de *Jones*, los cuales nos ayudaran a diferenciar los enlaces que no podíamos con técnicas más directas. Para llegar a esto, nos serviremos del Teorema de *Seifert-van Kampen* generalizado y de la presentación de Wirtinger para nudos y enlaces de rectas, al igual que buscaremos representar dichos conjuntos de rectas como complementarios de grafos y como trenzas, para posibilitar el estudio de sus grupos fundamentales.



# Capítulo 1

## Definiciones y primeras propiedades

En primer lugar, vamos a hacer una explicación y pequeña ampliación de lo que exponen O. y J. Viro en su artículo [10]. En él, realizan un estudio de enlaces de rectas en  $\mathbb{RP}^3$  buscando aquellas que no son isotópicas entre sí e introduciendo varios invariantes para poder determinar si existen o no dichas isotopías. Empezaremos por los casos más sencillos, (2 y 3 rectas) para ir introduciendo progresivamente, los conceptos necesarios para acabar realizando la clasificación de los más complicados (hasta 6 rectas).

Definimos el espacio proyectivo de dimensión  $n$ ,  $\mathbb{RP}^n$ , como el conjunto de las rectas vectoriales en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . También podemos verlo como el cociente  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{R}^*$ , donde  $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$  actúa en  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  por multiplicación, induciendo la relación de equivalencia por la que dos puntos están relacionados siempre que ambos sean proporcionales.

Observemos que  $\mathbb{RP}^n$  se puede ver como  $\mathbb{R}^n \cup \mathbb{RP}^{n-1}$  (el espacio afín y el hiperplano del infinito). En particular, las rectas proyectivas son  $\mathbb{R} \cup \mathbb{RP}^0$ , es decir, son homeomorfas a la compactificación por un punto de  $\mathbb{R}$ , es decir a  $\mathbb{S}^1$ .

### 1.1. Orientaciones y semi-orientaciones

En primer lugar vamos a recordar el concepto de orientabilidad en una variedad diferenciable. Para ello, recordemos que una orientación de un espacio vectorial real de dimensión finita se corresponde con la elección de una base ordenada; dos bases ordenadas definen la misma orientación si el determinante del cambio de base es positivo.

**Definición 1.1.** Una *orientación* de una variedad  $M$ , es una aplicación que asigna a cada  $p \in M$  una orientación  $\theta_p$  del espacio vectorial tangente  $T_pM$ , de manera que podemos encontrar un atlas de cartas de tal forma que, para cualquier carta que contenga a  $p$ , la base definida por la carta está en la orientación  $\theta_p$ . Una variedad se dice *orientable* si admite una orientación.

Es fácil ver que  $\mathbb{RP}^n$  es orientable si y solo si  $n$  es impar. Para el caso de las rectas (que son  $\mathbb{RP}^1$ , es decir, circunferencias), su orientación vendrá dada por el sentido que les otorguemos. El espacio proyectivo, visto como la unión de  $\mathbb{R}^3$  y el plano  $\mathbb{RP}_\infty^2$  del infinito, tiene como orientación la inducida por la orientación positiva de  $\mathbb{R}^3$ . En un conjunto de  $n$  rectas hay  $2^n$  posibles orientaciones (2 para cada recta).

**Definición 1.2.** Se llama *semiorientación* de un par de rectas, a un par de orientaciones opuestas de dicho conjunto. (Figura 1.1)

En el caso de  $\mathbb{RP}^3$ , debemos tener en cuenta que si buscamos una isotopía entre dos pares de rectas, en el proceso (además de no poder intersectar las rectas) tampoco podemos tener una situación de paralelismo entre las rectas, ya que eso significa que ambas se intersectan en el infinito. Sin embargo, podemos llevar una de las rectas hacia el infinito hasta sobrepasarlo, lo que nos devolverá la recta con la orientación contraria a la que tenía antes de moverla y con

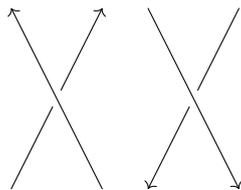


Figura 1.1: Semiorientación

la posición cambiada respecto a la otra recta del par (es decir, si estaba *delante* estará *detrás* y viceversa).

## 1.2. Número de enlace

Si  $M$  es una variedad de dimensión 3 conexa y compacta, un *nudo* en  $M$  es una inmersión inyectiva  $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$  (por la compacidad de  $\mathbb{S}^1$ , es un homeomorfismo sobre la imagen). Diremos que  $\Sigma_K$  es una superficie orientada que bordea  $K$  si  $\partial\Sigma_K \cong \mathbb{S}^1$  y existe una inmersión  $\Phi : \Sigma_K \rightarrow M$  tal que  $\Phi|_{\partial\Sigma_K} = \varphi$  y  $\Phi(\Sigma_K) \cap \varphi(\mathbb{S}^1) = \emptyset$ .

En general, denotaremos lo anterior escribiendo  $\partial\Sigma_K = K$ ; si  $\Phi|_{\partial\Sigma_K}$  recorre  $p$  veces  $\varphi$ , diremos que  $\partial\Sigma_K = pK$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .

**Definición 1.3.** Sea  $M$  variedad de dimensión 3, conexa compacta y orientada. Sean  $L, K \subseteq M$  dos nudos orientados, tales que  $L \cap K = \emptyset$ . Supongamos  $\exists p, q \in \mathbb{N}$  tales que  $qL = \partial\Sigma_L$  y  $pK = \partial\Sigma_K$ , respetando orientaciones, y tales que  $\Sigma_K \pitchfork L$  y  $\Sigma_L \pitchfork K$ . Definimos el *número de enlace* de  $L, K$ :

$$\mathcal{L}(L, K) := \frac{1}{p}\Sigma_K \cdot L = \frac{1}{q}\Sigma_L \cdot K$$

donde  $\cdot$  es el número de intersección.

*Observación 1.4.* Usando argumentos de topología algebraica, la definición anterior no depende de las elecciones y es invariante por isotopía.

Dos nudos en  $\mathbb{S}^3$  siempre verifican la condición (para  $p = q = 1$ ), por lo que su número de enlace es un número entero. Tomemos una recta  $L$  en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ . La representación del  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  como un disco con identificaciones en el borde (que representa  $L$ ), lo podemos interpretar como un disco  $D_L$  cuyo borde es  $2L$  (la imagen es un plano proyectivo que contiene a  $L$ ), como se ve en la Figura 1.2. A la derecha vemos la situación cuando  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  lo vemos como un plano ampliado en el infinito.

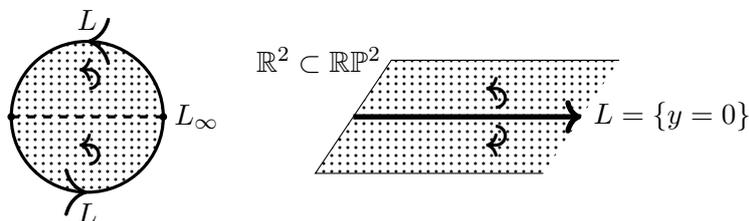


Figura 1.2: Plano proyectivo y orientaciones

Por tanto, es posible definir el número de enlace de dos rectas disjuntas en el espacio proyectivo. Como una recta corta a un plano proyectivo en exactamente un punto, dadas dos rectas disjuntas  $L_1, L_2$ , tendremos que  $\mathcal{L}(L_1, L_2) = \pm\frac{1}{2}$ , según las orientaciones en el punto de intersección. Si se comportan como en la Figura 12 del Anexo A.3, el número de enlace es positivo. Observemos que si ahora tomamos la recta  $L_2$  y la alejamos de  $L_1$  hasta atravesar el infinito, aparecerá por el otro *lado* de  $L_1$  con la orientación cambiada, pero como hemos realizado una

isotopía, el número de enlace no cambia. Si ahora es  $L_1$  la que nos llevamos al infinito, obtendremos el mismo enlace con orientaciones simultáneamente opuestas y con el mismo número de enlace. Por lo que, en efecto, ambas posibilidades son isotópicas. Es decir, el número de enlace no cambia en la misma semiorientación. Si cambiamos la orientación de una de las rectas, el número de enlace cambiará, pero si cambiamos la orientación de ambas, el número no cambiará. Por lo cual, el número de enlace es un *invariante de un par semiorientado de rectas*. Esto lo usaremos más adelante.

*Observación 1.5.* Por abuso de notación omitiremos el denominador 2 y los números de enlace entre rectas disjuntas serán  $\pm 1$ .

**Lema 1.6.** *Dos pares de rectas semiorientadas son isotópicas si y solo si tienen el mismo número de enlace.*

Se demuestra en el Anexo A.3.1. También podemos definir el mismo concepto de número de enlace para enlaces de tres rectas:

**Definición 1.7.** El *número de enlace*  $\mathcal{L}(a, b, c)$  de una terna de rectas  $a, b, c$  dos a dos disjuntas se define como el producto de los números de enlace de los tres pares de rectas.

*Observación 1.8.* El número de enlace de una terna de rectas no depende de la orientación de las mismas, ya que si cambiamos la orientación de una de las rectas cambia el número de enlace de dos de los pares y el producto no cambia de signo.

### 1.3. Conjuntos anfiqueirales y no-anfiqueirales

En  $\mathbb{RP}^3$  (y en  $\mathbb{R}^3$ ) hay homeomorfismos (y difeomorfismos) que cambian o invierten la orientación. La imagen especular es un ejemplo de ello.

**Definición 1.9.** Diremos que un conjunto de rectas disjuntas dos a dos es *anfiqueiral* si es isotópico a su imagen especular, en otro caso, diremos que el conjunto es *no-anfiqueiral*.

Dada esta definición, vemos claramente que una terna de rectas siempre es no-anfiqueiral, mientras que un par siempre es anfiqueiral. Es obvio que cualquier conjunto o enlace de más de tres rectas contiene ternas de rectas y acabamos de ver que cualquier terna es no-anfiqueiral, ya que las ternas cambian su número de enlace cuando las miramos reflejadas en un espejo. Por lo tanto, si el enlace es anfiqueiral, debe tener el mismo número de ternas con número de enlace 1 que con número de enlace  $-1$ , de lo que deducimos que el número de ternas debe de ser par.

**Teorema 1.10.** *Si  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , cualquier enlace compuesto por  $p$  rectas será no-anfiqueiral.*

*Demostración.* El número de ternas que hay en un enlace de  $p$  rectas es  $\frac{p(p-1)(p-2)}{6}$  que será un número impar  $\Leftrightarrow p \equiv 3 \pmod{4}$ .  $\square$

El Teorema 1.10 nos dice que podemos construir enlaces no-anfiqueirales de  $p$  rectas para cualquier  $p \geq 3$ . Pero todavía no sabemos si hay o no enlaces anfiqueirales de  $p$  rectas cuando  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . La respuesta va a ser que sí, para verlo vamos a considerar dos casos:  $p$  par y  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

Consideraremos un par de rectas con número de enlace 1 y añadiremos una recta horizontal que corte a ambas rectas por debajo del punto de cruce de ambas como muestra la Figura 1.3a.

Vamos a considerar ahora las rectas  $l_1$  y  $l_2$  como las *ánimas* de dos hiperboloides que se crucen, de esta forma la tercera recta  $e$  cortará a cada hiperboloide en dos puntos. Colocamos dos rectas en cada hiperboloide, una a cada lado de la recta  $e$ , como se muestra en la Figura 1.3b. Buscaremos una isotopía entre el enlace de 5 rectas formado por las cuatro rectas de los hiperboloides  $H_1$  y  $H_2$  y la recta  $e$  y su imagen especular.

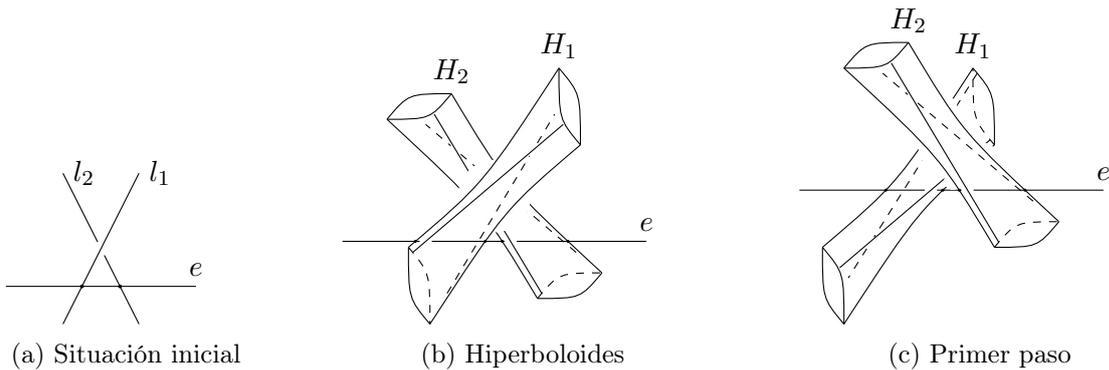


Figura 1.3

Primero giramos  $H_1$  con la recta  $e$  como eje, el cual moveremos ligeramente hacia atrás para que, al terminar el giro,  $H_1$  quede detrás de  $H_2$  como en la Figura 1.3c.

A continuación empujaremos  $H_1$  para colocar el cruce de sus dos rectas por encima del cruce entre los dos hiperboloides como se muestra en la primera parte de la Figura 1.4 y finalmente haremos un giro de  $180^\circ$  obteniendo la segunda parte de la Figura 1.4, que es la imagen especular del enlace que teníamos en la Figura 1.3b.

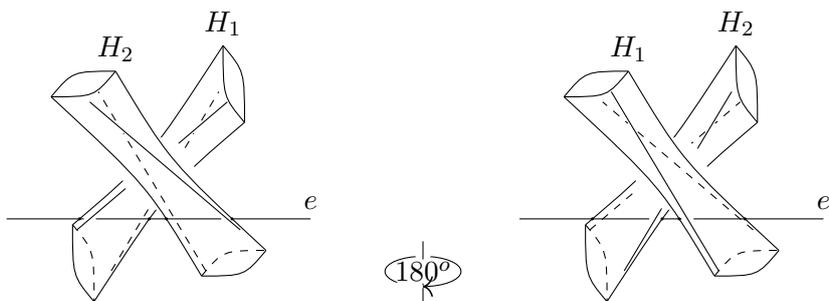


Figura 1.4: Final del proceso

Utilizando este argumento, vamos a ver que hay enlaces anfiqueirales de  $4q + 1$  rectas. En la Figura 1.3b, vemos un enlace para  $q = 1$ . La recta horizontal corta cada hiperboloide en dos puntos y tomamos en cada uno de ellos  $q$  rectas *por delante* y  $q$  rectas *por detrás*. Esto resuelve el caso  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

Si en este ejemplo olvidamos la recta horizontal y tomamos en cada hiperboloide  $m$  rectas (la posición con respecto a  $e$  no importa, por lo que  $m$  no necesitar ser par), entonces tenemos un enlace anfiqueiral de  $2m$  rectas, es decir el caso  $p$  par.

### 1.4. Rectas e hiperboloides

Al final de la sección 1.3, nos hemos servido de unos hiperboloides para trabajar con los enlaces de rectas. Consideremos ahora un hiperboloide elíptico  $H$ , veamos algunas propiedades de esta superficie que nos serán útiles.

**Proposición 1.11.** *Un hiperboloide elíptico  $H$  cumple las siguientes propiedades:*

- i) *Si una recta tiene 3 puntos en común con  $H \Rightarrow$  es generatriz.*
- ii) *Un plano que contiene a una generatriz de  $H$ , interseca  $H$  en dos generatrices.*
- iii) *Dada una terna de rectas disjuntas dos a dos, hay un hiperboloide elíptico que las contiene.*

La demostración se encuentra en el Anexo A.3.2. De la propiedad iii) deducimos que podemos encontrar un hiperboloide que tenga a las rectas de cualquier terna de rectas dos a dos disjuntas como rectas generatrices. Vamos a definir los hiperboloides en  $\mathbb{RP}^3$  como:

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_t^3 | x^2 + y^2 = z^2 + 1\} \subseteq \overline{H} = \{[t : x : y : z] \in \mathbb{RP}^3 | x^2 + y^2 = z^2 + t^2\}$$

Vamos a trabajar con los hiperboloides sólidos:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_t^3 | x^2 + y^2 \leq z^2 + 1\} \subseteq \overline{V} = \{[t : x : y : z] \in \mathbb{RP}^3 | x^2 + y^2 \leq z^2 + t^2\}$$

Así, trabajaremos con rectas dentro de estos hiperboloides sólidos, vamos a buscar una forma sencilla de representar las distintas rectas que podemos encontrar en  $\overline{V}$ .

Sea  $l \subset \overline{V}$  una recta, es claro que  $l$  corta al disco  $D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}_t^3 | x^2 + y^2 \leq 1\}$  en un punto  $p \in D \cap l$ . Además, si  $l \subset \overline{V}$ , la dirección de  $l$  no puede ser horizontal y viene determinada por un vector  $(v, 1)$ ,  $v \in \mathbb{R}^2$ . Estos dos datos identifican a la recta que denotaremos  $l_{p,v} \equiv (p, 0) + \lambda(v, 1)$ .

Para que dicha recta esté en  $\overline{V}$ , tiene que satisfacer las condiciones siguientes (cálculos sencillos):

$$\|v\|^2 \leq 1, \quad \|p\|^2 \leq 1, \quad \|p\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \alpha + 1 \geq \|p\|^2 + \|v\|^2 \quad \alpha = \angle(p, v).$$

Si queremos que  $l_{p,v} \subset \overline{H}$ , es decir que sea una recta generatriz del hiperboloide, tendrá que cumplir:

$$\|v\|^2 = 1, \quad \|p\|^2 = 1, \quad \langle p, v \rangle = 0.$$

Es decir  $p, v$  forman una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ . De lo que podemos deducir que habrá dos tipos de rectas en  $\overline{H}$  dependiendo de si  $\det(p, v) = 1$  ó  $\det(p, v) = -1$ .

**Lema 1.12.** *Consideramos dos rectas disjuntas, es fácil ver que  $l_{p,v} \cap l_{q,w} = \emptyset \Leftrightarrow q - p$  y  $w - v$  son linealmente independientes.*

*Demostración.* Recordemos que  $l_{p,v} = (p, 0) + \lambda(v, 1)$  y  $l_{q,w} = (q, 0) + \mu(w, 1)$ . Si  $l_{p,v} \cap l_{q,w} \neq \emptyset$ , se tiene  $(p, 0) + \lambda(v, 1) = (q, 0) + \mu(w, 1) \Rightarrow \lambda = \mu$ .

Así tenemos que:  $(p - q) + \lambda(v - w) = 0 \Rightarrow q - p$  y  $w - v$  deben ser linealmente dependientes.  $\square$

Si tenemos  $l_1, l_2 \subset \overline{V}$ ,  $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ , podemos encontrar una isotopía que nos lleve  $l_1 \rightsquigarrow l_{0,0}$  al ánima del hiperboloide y  $l_2 \rightsquigarrow \overline{H}$  al borde, o bien, podemos encontrar una isotopía que nos lleve ambas rectas  $l_1, l_2 \rightsquigarrow \overline{H}$  al borde.

Veamos que el espacio proyectivo como unión de toros sólidos. Consideremos el hiperboloide en  $\mathbb{RP}^3$   $h : x^2 + y^2 = z^2 + t^2$ , observar que en  $\mathbb{RP}^3$ , si utilizamos esta superficie para descomponer nuestro espacio como unión de  $H : \{x^2 + y^2 \leq z^2 + t^2\}$  y  $V : \{x^2 + y^2 \geq z^2 + t^2\}$ , es fácil ver que  $V$  es un toro sólido pero, por simetría, vemos que  $H$  es también un toro, por lo que podemos descomponer  $\mathbb{RP}^3$  como unión de dos toros sólidos que se intersecan en la frontera de ambos ( $H \cap V = x^2 + y^2 = z^2 + t^2$ ).

## 1.5. Fibraciones

**Lema 1.13.** *Sean  $r, s \subseteq \mathbb{RP}^3$  dos rectas disjuntas. Entonces,*

- (i) *Existen dos fibraciones  $\pi_{\pm} : \mathbb{RP}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  de tal manera que  $r$  y  $s$  son fibras y podemos orientar las fibras  $L_{\pm}$  de  $\pi_{\pm}$  para que su número de enlace  $\mathcal{L}(L_{\pm}, L_{\pm}^-)$  sea  $\pm 1$  (con esa orientación,  $\mathcal{L}(r, s) = \pm 1$ ).*
- (ii) *Sea  $t \subseteq \mathbb{RP}^3$  otra recta disjunta con las anteriores tal que  $t$  isotopa es a una fibra de  $\pi_{\pm}$  (sin tocar  $r \cup s$ ). Si lo es a una fibra de  $\pi_+$ ,  $\pi_-(t)$  es circunferencia que separa a  $\pi_-(r)$  de  $\pi_-(s)$ ;  $\pi_+(t)$  es un punto o una circunferencia que no separa (un enunciado análogo se sigue si  $t$  es isotopa a una fibra de  $\pi_-$ , intercambiado  $\pi_+$  y  $\pi_-$ ).*

*Demostración.* Vamos a calcular la imagen de una recta por  $\pi_+$ , de donde se deducen los resultados, asumiendo que  $r, s$  se envían sobre  $0, \infty \in \mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Utilizando la misma representación para las rectas que la utilizada en la sección 1.4, definimos la recta  $L = (p, 0) + \lambda(v, 1)$ . Si tenemos en cuenta que  $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{RP}^3$ , podemos considerar que  $p, v \in \mathbb{C}$ . De esta forma, consideramos  $(\lambda, p + \lambda v) = (z, \omega) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ .

Definimos ahora la función

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, \omega) &\longmapsto \frac{\omega}{1 + iz}, \end{aligned}$$

que se extiende a  $\mathbb{RP}^3$  y  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . El número de enlace de  $r = l_{0,0}$  y  $s = \Phi^{-1}(\infty)$  es  $+1$ . De esta manera,

$$\Phi(L) = \frac{p + \lambda v}{1 + i\lambda} \in \mathbb{C},$$

Si llamamos  $w = \frac{p + \lambda v}{1 + i\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{w - p}{v + iw} \in \mathbb{R}$ , por lo tanto:

$$\frac{w - p}{v + iw} = \frac{\overline{w - p}}{1 + iw} \Rightarrow \left( w - \frac{p - iv}{2} \right) \left( \overline{w} - \frac{\overline{p} + i\overline{v}}{2} \right) = \frac{(p + iv)(\overline{p} - i\overline{v})}{4} \Rightarrow \left\| w - \frac{p - iv}{2} \right\|^2 = \frac{\|p + iv\|^2}{4}.$$

Es decir, la imagen es una circunferencia centrada en  $\frac{p - iv}{2}$  y de radio  $\frac{\|p + iv\|}{2}$ .

Del apartado 1.4 deducimos que al llevar las rectas al borde del hiperboloide, tendremos que se cumple  $\|v\|^2 = 1$ ,  $\|p\|^2 = 1$  y  $v = \pm ip$  según pertenezcan a la fibra  $\pi_{\pm}$ . Así que si una recta pertenece a la fibra  $\pi_+$  y calculamos su imagen por esa misma fibra, obtendremos una recta centrada en  $p$  y de radio 0. Mientras que si una recta pertenece a la fibra  $\pi_-$  y calculamos su imagen por  $\pi_+$ , obtendremos una circunferencia de centro 0 y radio  $\|p\|$ .  $\square$

Podemos utilizar esto para estudiar los enlaces, si realizamos una proyección de un enlace  $L \subseteq \mathbb{RP}^3$  sobre  $\pi_{\pm}$ , las rectas de  $L$  que sean isótopas a la fibra escogida, se proyectaran como circunferencias que no rodean ni a 0 ni a  $\infty$  que podremos isotopar a puntos, y las que sean isótopas a la otra fibra, se proyectarán sobre circunferencias concéntricas. Los *puntos* que no estén separados unos de otros por circunferencias, representarán a rectas isótopas del enlace con número de enlace  $\pm 1$  ( $+1$  si hemos proyectado sobre  $\pi_+$  y viceversa), lo mismo pasará con las circunferencias que no separen puntos, pero en este caso tendrán el número de enlace opuesto a las anteriores.

## Capítulo 2

# Configuraciones de enlaces de rectas

### 2.1. Dos y tres rectas

Como hemos visto en el capítulo anterior, el número de enlace es un invariante para pares de rectas, así que vamos a explicar cómo calcular el número de enlace para un par de rectas.

Con las observaciones dadas anteriormente para calcular el número de enlace, elegimos primero un plano proyectivo que no contenga a ninguna de las dos rectas, que tomaremos como plano del infinito. En el espacio afín  $\mathbb{R}^3$  que queda, representamos las rectas usando una proyección sobre un plano. Como las rectas son disjuntas en  $\mathbb{RP}^3$ , las rectas representadas en  $\mathbb{R}^3$  son disjuntas y no paralelas. Por tanto, se proyecta en dos rectas no paralelas en el plano. Como habitualmente, representamos quién pasa por encima y por debajo desconectando la recta inferior. El número de enlace se calcula así: se rota la recta superior sobre la inferior siguiendo el camino más corto. Si este es antihorario, el número de enlace es positivo; si es horario, negativo.

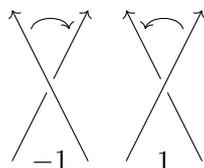


Figura 2.1: Pares de rectas con distinto número de enlace

En conclusión, si olvidamos las orientaciones o semiorientaciones, *todo par de rectas disjuntas es isotópo a un par de rectas disjuntas dado*, por lo tanto **hay un único enlace de dos rectas**.

Vamos a ver cómo se realizan estos cálculos algebraicamente. Vamos a considerar un par de rectas disjuntas  $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{RP}^3$  como subespacios vectoriales:  $L_1 = \mathbb{R}\langle v_1, v_2 \rangle$ ,  $L_2 = \mathbb{R}\langle w_1, w_2 \rangle$ , así  $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$  es base de  $\mathbb{R}^4$ .

**Lema 2.1.** *Con las notaciones anteriores, si  $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$  es base positiva de  $\mathbb{R}^4$ , entonces,  $\mathcal{L}(L_1, L_2) = 1$ . En caso contrario,  $\mathcal{L}(L_1, L_2) = -1$ .*

*Demostración.* En  $\mathbb{R}^4$  consideramos coordenadas homogéneas  $[t : x : y : z]$ , e identificamos  $\mathbb{R}^3$  con  $t = 1$ . Como  $GL^+(4; \mathbb{R})$  es conexo, podemos suponer que si  $\mathcal{L}(L_1, L_2) = 1$ , entonces,  $L_1, L_2$  están engendrados por las columnas de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En  $\mathbb{R}^3$  corresponden a las rectas  $L_1 : y = z = 0$ ,  $L_2 : y = 1, x = 0$ , como en la Figura 12, lo que prueba el resultado.  $\square$

Tomemos ahora tres rectas  $L_1, L_2, L_3$ . Las orientamos para que  $\mathcal{L}(L_1, L_2) = \mathcal{L}(L_2, L_3) = 1$ . Con otro cambio de coordenadas (positivo), podemos suponer que  $L_1, L_2$  están engendrados por las columnas de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una base de  $L_3$  está formada por las columnas de

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ A \end{pmatrix}, \quad A \in \text{Mat}(2; \mathbb{R}).$$

Como  $L_3$  es disjunta a  $L_1$ , necesariamente  $A \in \text{GL}(2; \mathbb{R})$  y el signo de  $\mathcal{L}(L_1, L_3)$  coincide con el de  $\det A$ . Es decir, tras un cambio de coordenadas positivos solo nos quedan estas dos posibilidades. La primera es:

$$L_1 : \begin{pmatrix} I_2 \\ 0 \end{pmatrix}, L_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix}, L_3 : \begin{pmatrix} I_2 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

La segunda se obtendría tomando como  $A$  una matriz de determinante negativo. Sin embargo, cambiando la orientación de  $L_2$  podemos tomar las rectas orientadas

$$L_1 : \begin{pmatrix} I_2 \\ 0 \end{pmatrix}, L_2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de manera que los tres números de enlace son negativos. Es claro que un cambio de coordenadas negativo cambia el signo del producto de los números de enlace, así que son imágenes de espejo la una de la otra, por lo que tienen distinto número de enlace. Podemos deducir el Teorema 2.2.

**Teorema 2.2.** *Dos ternas de rectas son isotópicas  $\Leftrightarrow$  tienen el mismo número de enlace. Solo hay salvo isotopía dos ternas posibles y una es la imagen especular de la otra.*

En [10], estas dos ternas se representan como como aristas de un cubo como en la Figura 2.2.

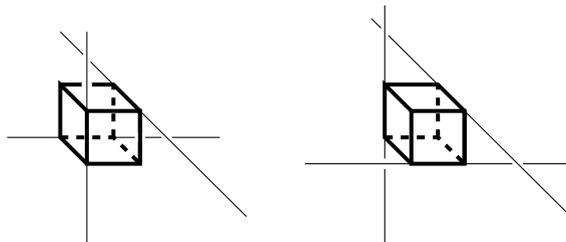


Figura 2.2: Tipos posibles de ternas

## 2.2. Rectas isotópicas de un enlace. Enlace derivado.

Dos rectas de un enlace se dicen isotópicas si existe una isotopía del enlace que nos lleva la una a la otra. Vamos a dar una definición más precisa, si utilizamos las características de las rectas y los hiperboloides vistos anteriormente, podemos deducir la siguiente definición:

**Definición 2.3.** Dos rectas  $l_1$  y  $l_2$  de un enlace  $\mathcal{L}$  serán *isotópicas* si hay una isotopía que nos permite acercar una recta a la otra de tal forma que podemos encontrar un hiperboloide sólido  $V$  tal que  $l_1, l_2 \subset V$  y  $\mathcal{L} \setminus \{l_1, l_2\} \cap V = \emptyset$ .

De esta definición podemos deducir el siguiente lema:

**Lema 2.4.** *La isotopía de rectas en un enlace  $\mathcal{L}$  es una relación de equivalencia.*

*Demostración.* Haciendo uso de la definición anterior, veamos que la isotopía de rectas cumple las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad:

- Reflexividad: Es obvio que  $\forall l \in \mathcal{L}$ ,  $l$  es isótopa a si misma.
- Simetría: Es directo, si  $l_1, l_2$  son isótomas, ambas estarán en el mismo hiperboloide.
- Transitividad: Supongamos que podemos encontrar un hiperboloide  $V_1$  tal que las rectas  $l_1$  y  $l_2$  estén contenidas en él (son isótomas) y un hiperboloide  $V_2$  para las rectas  $l_2$  y  $l_3$ . Por lo visto anteriormente, podemos llevar  $l_1$  al ánima de  $V_1$  y  $l_2$  al borde, para a continuación intercambiar su situación mediante una isotopía y tener  $l_2$  en el ánima y  $l_1$  en el borde, por lo tanto, tendríamos a  $l_1$  en la posición anterior de  $l_2$ , así que el hiperboloide  $V_2$  contendría ahora a  $l_1$  y a  $l_3$ , por lo que serían isótomas.  $\square$

*Observación 2.5.* Teniendo en cuenta la Definición 2.3 y el Lema 2.4, un conjunto de rectas isótomas  $\{l_1, l_2, \dots, l_r\}$  de un enlace  $\mathcal{L}$  es una clase de equivalencia. El resultado siguiente es inmediato.

**Lema 2.6.** *Rectas isotópicas tienen la misma posición relativa con respecto al resto de rectas del enlace, esto quiere decir que si  $a$  y  $b$  son rectas isotópicas y  $c$  y  $d$  son otras dos rectas del mismo enlace, entonces las ternas  $\{a, c, d\}$  y  $\{b, c, d\}$  tienen el mismo número de enlace.*

**Definición 2.7.** El enlace resultante de tomar un representante de cada clase de equivalencia se llama *enlace derivado*.

**Definición 2.8.** Una *clase de rectas isotópicas* de un enlace es un invariante  $\varepsilon (= \pm 1)$  que denotaremos  $\varepsilon$ -clase.

**Definición 2.9.** Un enlace se dice *completamente descomponible* si podemos tomar sucesivos enlaces derivados hasta llegar a la forma de un enlace de una sola recta.

Un enlace completamente descomponible se puede caracterizar por los invariantes asociados a sus enlaces derivados. Denotaremos por  $\langle \varepsilon_p \rangle$  a un enlace de  $p$  rectas generatrices de un hiperboloide que forma una  $\varepsilon$ -clase de rectas isotópicas.

Si consideramos  $p$  hiperboloides que abarcan regiones disjuntas del espacio y que contienen las rectas de un enlace  $\langle \varepsilon_p \rangle$  como sus ejes. Si un enlace esta compuesto por  $p$  sub-enlaces  $A_1, \dots, A_p$ , cada uno en su correspondiente hiperboloide, lo denotaremos por  $\langle \varepsilon A_1, \dots, A_p \rangle$  según  $\varepsilon$  sea  $+1$  ó  $-1$ . Visto este concepto de derivado, podemos construir enlaces de rectas partiendo de un par de rectas y haciendo la construcción a la inversa, *desdoblado* rectas de forma que su número de enlace sea el que nos interese. Si  $p = 2$  el signo es irrelevante (solo en el primer enlace derivado) y si  $A_i = \langle \pm m \rangle$ ,  $A_j = \langle \pm n \rangle$  (con el mismo signo e igual a  $\varepsilon$ ), entonces se pueden reemplazar por  $\langle \pm(m+n) \rangle$ .

### 2.3. Enlaces tipo *join*.

Para enlaces de rectas mas complicados, con mayor número de rectas, vamos a necesitar una construcción propuesta por Mazurovskii en [6] y en [8] para representar algunos enlaces de rectas. Para ello tomamos dos rectas  $l$  y  $m$  que se cruzan, orientadas, cuyo número de enlace sea  $-1$ . Marcamos  $k$  puntos en cada una de estas rectas y los denotamos como  $A_1, \dots, A_k$  y  $B_1, \dots, B_k$  respectivamente, respetando la orientación de las rectas. Tomamos ahora una permutación  $\sigma$  de  $\{1, \dots, k\}$  y ahora construimos nuestro enlace de rectas uniendo  $A_i$  con  $B_{\sigma(i)}$ .

**Definición 2.10.** El enlace de  $k$  rectas  $A_1 B_{\sigma(1)}, \dots, A_k B_{\sigma(k)}$  se llama *join* de la permutación y se denota  $jc(\sigma)$ .

Vamos a explicar como construir el *join* de una permutación. Para ello vamos a tomar dos rectas  $m$  y  $l$  con número de enlace  $-1$ :  $l := \{(x, \varepsilon x, 1)\}$  y  $m := \{(x, 0, 0)\}$  con  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Marcamos  $n$  puntos sobre cada recta, separados por una unidad (cada uno relacionado con su homólogo de la otra recta). Si ahora aplicamos cualquier permutación, y construimos las rectas que se forman, podemos comprobar fácilmente que los cruces que obtenemos entre  $m$  y  $l$  tienen número de enlace  $+1$ , mientras que los cruces que quedan por encima de  $l$ , para obtener la situación de las rectas en el infinito, serán de número de enlace  $-1$ . Podemos verlo en un ejemplo:

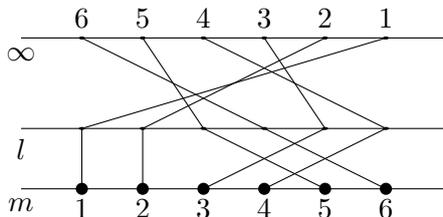


Figura 2.3: Representación de un enlace tipo *join*.

El concepto de trenza, que se introduce en la sección 3.4 permitirá codificar apropiadamente los enlaces *join* a partir de lo representado en la Figura 2.3.

*Observación 2.11.* Es fácil ver que si  $\sigma$  es una permutación de  $n$  cifras, entonces la permutación  $(1, \dots, n)^a \sigma^{\pm 1} (1, \dots, n)^b$  define un enlace isótopo al de  $\sigma$ . Es más, si  $\delta$  es la permutación tal que  $j^\sigma = n + 1 - j$ , entonces  $jc(\sigma^{-1}\delta)$  es isótopa a la imagen especular de  $jc(\sigma)$ .

### 2.4. Cuatro y cinco rectas

Vamos a demostrar que **todo enlace de 4 rectas es isotópico a uno de los tres** de la Figura 2.4.

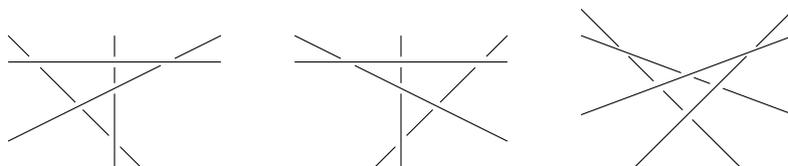


Figura 2.4: Enlaces No-isotópicos de Cuatro Rectas

Para demostrar que no hay más enlaces posibles, vamos a servirnos de lo propuesto antes en la sección 1.5. Vamos a partir de los enlaces de tres rectas y añadiremos una recta a estos enlaces para obtener los de cuatro. Para ello nos servimos del Lema 1.13; estudiamos los distintos enlaces de cuatro rectas que podemos formar, que se muestran en la Figura 2.5 (en negro las rectas proyectadas del enlace de tres rectas del que partimos y su derivado y en rojo la recta añadida proyectada y el derivado del enlace resultante), obtenemos que todos son isotópicos a los de la Figura 2.4, que son completamente descomponibles y cuyos derivados son  $\langle 4 \rangle$ ,  $\langle -4 \rangle$  y  $\langle \langle 2 \rangle, \langle -2 \rangle \rangle$ . Y no hay más posibilidades.

Por otro lado, se puede probar que **cualquier enlace de cinco rectas es isotópico a uno de los siete** que se muestran en la Figura 2.6.

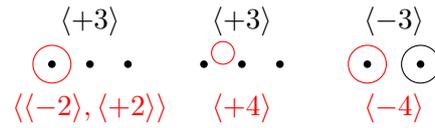


Figura 2.5

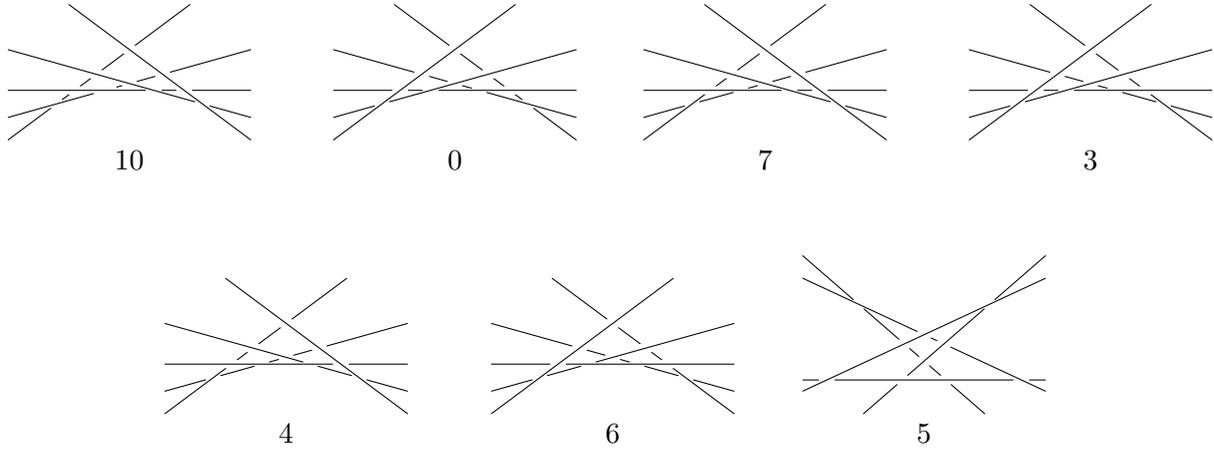


Figura 2.6: Configuraciones de cinco rectas

Seis de ellos son enlaces no-anfiqueirales y completamente descomponibles y tienen los símbolos:

$$\langle +5 \rangle, \langle -5 \rangle, \langle \langle +3 \rangle, \langle -2 \rangle \rangle, \langle \langle -3 \rangle, \langle +2 \rangle \rangle, \langle +\langle 1 \rangle, \langle -2 \rangle, \langle -2 \rangle \rangle, \langle -\langle 1 \rangle, \langle +2 \rangle, \langle +2 \rangle \rangle$$

El séptimo, no descomponible, es isomorfo a uno que hemos visto anteriormente (Figura 1.3b).

Podemos ver que los siete enlaces son no-isotópicos viendo el número de ternas con número de enlace positivo (número debajo de cada enlace en la Figura 2.6), que como sabemos se conservan bajo isotopías.

De la misma forma que hemos hecho en el apartado anterior, podemos buscar todos los enlaces de cinco rectas partiendo de los distintos enlaces de cuatro rectas y añadiendo una quinta de distintas formas. En este caso, encontrar todos los casos ya se empieza a hacer algo complicado, de hecho, en este caso obtenemos un enlace no descomponible y anfiqueiral, que es difícil de representar con las fibraciones, para representar este tipo de enlaces, deberemos considerar la quinta recta añadida contenida en el plano horizontal y en vez de trabajar con las proyecciones de las distintas fibraciones, podemos trabajar con los cortes de las distintas rectas sobre dicho plano y podemos ver en que casos podemos obtener un isotopía que nos transforme el enlace en uno de los descomponibles y en qué casos no. Si lo hacemos teniendo en cuenta las posibles isotopías, llegamos a los tipos que obtiene Viro.

## 2.5. Números de enlace de ternas como invariante de enlaces

Otra forma de caracterizar un enlace de rectas, es buscar las distintas ternas que podemos encontrar en ellas y contar el número de ternas positivas y el número de ternas negativas que contiene cada enlace. De esta forma podemos guardar el número de ternas con número de enlace positivo y caracterizar cada tipo de enlace con este número, así, los distintos tipos de enlaces de cuatro rectas serán los que se ven en la tabla de la Tabla 2.1.

Podemos hacer un programa en **Sagemath** que nos calcule este número para cualquier enlace que le introduzcamos (lo introduciremos en forma de trenza, más adelante explicaremos como representar un enlace como una trenza) y también podemos pedirle a Sage que quite una recta

<b>Enlace:</b>	$\langle 4 \rangle$	$\langle -4 \rangle$	$\langle\langle 2 \rangle\langle -2 \rangle\rangle$
<b>Ternas +:</b>	4	0	2

Tabla 2.1: Tabla de signos de ternas en enlaces de 4 rectas

de un enlace y calcule el número para el enlace resultante de quitar las distintas rectas, de esta forma podemos ver rápidamente a que enlace de  $n - 1$  rectas le debemos añadir una (y de que forma) para obtener un determinado enlace de  $n$  rectas, aunque no nos sirve para demostrar que no hay mas, pero puede ser un resultado interesante. Por ejemplo, si al primero de los enlaces de cinco, numeramos las rectas del 1 al 5 como se muestra en la Figura 2.7.

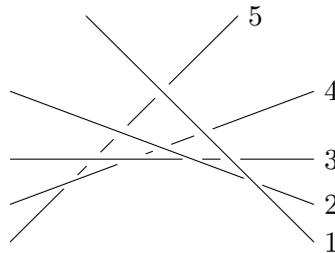


Figura 2.7

Si introducimos el enlace en el programa de **Sagemath**, las ternas positivas del enlace de cuatro rectas resultante de quitar cada recta se representa en la tabla de la Tabla 2.2.

<b>Recta eliminada:</b>	1	2	3	4	5
<b>Ternas +:</b>	4	4	4	4	4

Tabla 2.2

Lo que nos indica que quitemos la recta que quitemos, el enlace resultante es el que tiene como derivado  $\langle 4 \rangle$  que es el que tiene 4 ternas con número de enlace +1. Estas relaciones las vamos a utilizar sobre todo en el siguiente caso de 6 rectas, que es mas complicado, para ello vamos a calcular las ternas "positivas" de cada enlace en la tabla de la Tabla 2.3

<b>Enl.:</b>	$\langle +5 \rangle\langle -5 \rangle$	$\langle\langle +3 \rangle, \langle -2 \rangle\rangle$	$\langle\langle -3 \rangle, \langle +2 \rangle\rangle$	$\langle +\langle 1 \rangle, \langle -2 \rangle, \langle -2 \rangle \rangle$	$\langle -\langle 1 \rangle, \langle +2 \rangle, \langle +2 \rangle \rangle$	indesc.	
<b>Ter. +:</b>	10	0	7	3	6	4	5

Tabla 2.3: Tabla de signos de ternas en enlaces de 5 rectas

## 2.6. Seis rectas

Es difícil ver que hay 19 tipos de enlaces de 6 rectas. En este caso ya no podemos distinguir entre enlaces no-isotópicos utilizando el número de enlace de ternas de rectas en cada enlace. Para ver las distintas clases de isotopía, debemos calcular invariantes más complicados. Manzurowskii dice en [7] que si queremos probar que dos enlaces de 6 rectas no son isotópicos o si queremos saber la clase de isotopía de un enlace de 6 rectas dado, es suficiente usar el invariante polinómico de enlaces en  $\mathbb{R}P^3$  que introduce Drobotukhina en [3], sin embargo nosotros vamos a probarlo de otra manera, mediante el número de ternas positivas, como hemos indicado anteriormente, y con otros invariantes suplementarios.

El enlace derivado de  $L$  (Figura 2.8 derecha) coincide con él mismo. Lo mismo ocurre con su imagen de espejo  $L'$ , con  $M$  (Figura 2.8 izquierda), con su imagen de espejo  $M'$  y también





# Capítulo 3

## Grupo fundamental y trenzas

### 3.1. Grupo fundamental

**Definición 3.1.** Un camino  $\alpha$  en un espacio topológico  $X$  se dice *lazo basado en*  $x_0 \in X$  si tiene  $x_0$  como principio y final ( $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ ). El conjunto de clases de homotopía (relativa al borde) de los lazos basados en  $x_0$ , es el *grupo fundamental*, denotado  $\pi_1(X; x_0)$ .

**Teorema 3.2.** *La suma de caminos respeta el tipo de homotopía relativo al borde, por lo que  $\pi_1(X; x_0)$  tiene estructura de grupo (lo que justifica la definición anterior).*

**Corolario 3.3.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua, la aplicación natural  $f_* : \pi_1(X; x_0) \rightarrow \pi_1(Y; f(x_0))$  es un homomorfismo de grupos que se conoce como el homomorfismo inducido por  $f$ . Además  $(1_X)_* = 1_{\pi_1(X; x_0)}$  y si  $g : Y \rightarrow Z$  es continua, entonces  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .*

#### 3.1.1. Seifert-Van Kampen

**Definición 3.4.** Un subconjunto  $X$  de un grupo  $G$  es un *conjunto de generadores* si cada elemento  $g \in G$  se puede expresar como producto finito:

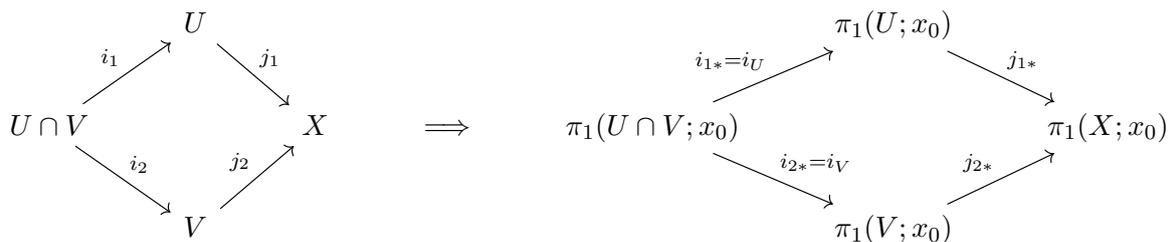
$$g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k} \text{ donde } x_i \in X \text{ y } n_i \in \mathbb{Z}.$$

Si hay una única manera de expresar  $g \in G$  como un producto como el anterior, con  $x_i \neq x_{i+1}$  y  $n_i \neq 0$ , decimos que  $X$  es un *conjunto libre de generadores* y si un grupo  $G$  contiene un conjunto libre de generadores, decimos que es un *grupo libre*.

Sea  $X = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son abiertos conexos por caminos y  $U \cap V$  es no vacío y conexo por caminos. Sea  $x_0 \in U \cap V$ , y sean conocidas las presentaciones:

$$\pi_1(U; x_0) = \langle S_1 : R_1 \rangle, \quad \pi_1(V; x_0) = \langle S_2 : R_2 \rangle, \quad \pi_1(U \cap V; x_0) = \langle S : R \rangle.$$

Con las inclusiones, obtenemos el diagrama conmutativo:



Para cada  $\alpha \in \pi_1(U \cap V; x_0)$ , sean  $i_U(\alpha)$  el lazo  $\alpha$  visto en  $\pi_1(U; x_0)$  y lo mismo para  $i_V(\alpha)$ .

**Teorema 3.5.** *En las condiciones descritas anteriormente:*

$$\pi_1(X = U \cup V; x_0) = \frac{\pi_1(U; x_0) * \pi_1(V; x_0)}{\langle i_U(\alpha) = i_V(\alpha) | \alpha \in \pi_1(U \cap V; x_0) \rangle}$$

Se da un idea de la demostración en el Anexo A.3.3. Vamos a generalizar este teorema.

**Teorema 3.6.** *Sea  $X = Y \cup Z$  con  $Y, Z$  conexos por caminos y sea  $Z \cap Y = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_r$   $r \geq 0$  la descomposición en componentes conexas por caminos.*

*Para cada  $x_i \in A_i$  con  $i = 0, \dots, r$ , fijamos caminos*

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{Y,i} : [0, 1] & \longrightarrow & Y & & \gamma_{Z,i} : [0, 1] & \longrightarrow & Z \\ 0 & \longmapsto & x_0 & & 0 & \longmapsto & x_0 \\ 1 & \longmapsto & x_i & & 1 & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Sean  $\eta_i := [\gamma_{Y,i} \cdot \gamma_{Z,i}^{-1}] \in \pi_1(X; x_0)$  (denotamos  $\eta_0 = 1$ ). Entonces:

$$\pi_1(X; x_0) = \frac{\pi_1(Y; x_0) * \pi_1(Z; x_0) * \mathbb{Z}_{\eta_1} * \dots * \mathbb{Z}_{\eta_r}}{\langle \gamma_{Y,i} \cdot i_Y(\alpha) \cdot \gamma_{Y,i}^{-1} = \eta_i \cdot \gamma_{Z,i} \cdot i_Z(\alpha) \cdot \gamma_{Z,i}^{-1} | \alpha \in \pi_1(A_i, x_i) \rangle}$$

*Idea de la demostración.* De la misma forma que en la demostración del teorema anterior, dado un camino  $\gamma : I \rightarrow Y \cup Z$ , por compacidad podemos dividir el intervalo  $I = [0, 1]$  en  $I_0 \cup I_1 \cup \dots \cup I_r$  de tal forma que si  $I_j = [t_{j-1}, t_j]$  se tiene que  $\gamma(I_j) \subseteq Y$  ó  $Z$  (alternativamente), de tal forma que  $\gamma(t_j) \in Y \cap Z$ ; supongamos que  $\gamma(t_j) \in A_{m_j}$ . Denotamos  $\gamma_j := \gamma|_{I_j}$  y fijamos caminos  $\alpha_j$  que unen  $\gamma(t_j)$  con  $x_{m_j}$ , siendo  $x_{m_j}$  el punto base de  $A_{m_j}$ , para  $j = 1, \dots, r-1$ . Así, :

$$\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_r \simeq \gamma_1 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_1^{-1} \cdot \gamma_2 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \dots = (\gamma_1 \cdot \alpha_1) \cdot \prod_{j=1}^{r-1} (\alpha_j^{-1} \cdot \gamma_j \cdot \alpha_{j+1}) \cdot (\alpha_r^{-1} \cdot \gamma_r) = \tilde{\gamma}_1 \dots \tilde{\gamma}_r$$

Podemos suponer que  $\text{Im } \tilde{\gamma}_1 \subset Y$  y que  $\text{Im } \tilde{\gamma}_r \subset Z$  y que alternan ; para simplificar la notación, reddenotamos  $\tilde{\gamma}_j = \gamma_j$  para  $j = 1, \dots, 2s$  con  $r = 2s$ . Si ahora definimos los siguientes caminos:  $\delta_i^Y : I \rightarrow Y$  que va de  $x_0$  a  $x_i$  y  $\delta_i^Z : I \rightarrow Z$  que va de  $x_0$  a  $x_{m_i}$ .

$$\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_{2s} = (\gamma_1 \cdot \delta_1^{Y^-}) \cdot (\delta_1^Y \cdot \delta_1^{Z^-}) \cdot (\delta_1^Z \cdot \gamma_2 \cdot \delta_2^{Z^-}) \cdot (\delta_1^Z \cdot \delta_1^{Y^-}) \cdot \dots \cdot (\delta_{2s-1}^Z \cdot \gamma_{2s}).$$

Con esto se demuestra que el grupo de  $X$  está engendrado por los grupos de  $Y, Z$  y los caminos  $\eta_j$ . El final de la demostración sigue las mismas técnicas que la demostración del teorema clásico.  $\square$

**Corolario 3.7.** *En las condiciones anteriores, si  $Z, A_0, A_1, \dots, A_r$  simplemente conexos  $\Rightarrow \pi_1(X; x_0) \simeq \pi_1(Y; x_0) * \mathbb{F}_r$ .*

## 3.2. Grupo del complementario de un grafo acotado

Sea  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$  un grafo plano y sea  $D$  un disco cuyo borde contenga a  $\Gamma$  y que determina una descomposición celular de  $D$ .

**Propiedades.** *Con las condiciones anteriores, el grupo  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$  es libre de rango  $r$ .*

*Demostración.* Es fácil ver que  $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$  tiene el tipo de homotopía de  $(D \times [-1, 1]) \setminus \Gamma$ , por lo que sus grupos fundamentales son isomorfos. Sean  $C_1, \dots, C_r$  las celdas de  $D$  delimitadas por  $\Gamma$  y sean  $Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_r$  subespacios topológicos definidos como sigue:

$$\begin{cases} Y_0 = \mathbb{R}^3 \setminus U(D) & U(D) \text{ abierto tq } D \subset U(D) \\ Y_j = Y_{j-1} \cup \bar{U}(C_j) & \bar{U} \text{ más alto que } U \end{cases}$$

Así:  $Y_r \simeq \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ . Como  $\pi_1(Y_0) = 1$  y por el corolario anterior sabemos que por cada  $Y_j$  que añadimos, también añadimos un generador al grupo libre, por lo tanto, cuando llegemos a  $Y_r$  tendremos  $\pi_1(Y_r) = \mathbb{F}_r$ .  $\square$

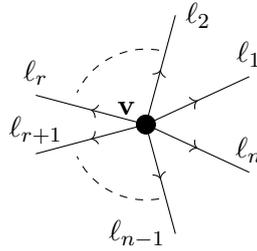
Para  $\Gamma$  y  $D$  como antes, definimos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{V} = \{\text{vértices de } \Gamma\}, \quad \mathcal{L} = \{\text{aristas de } \Gamma\}, \quad \mathcal{R} = \{\text{caras de } \Gamma\}.$$

Son los elementos de la descomposición celular de  $D \in \mathbb{R}^2$ , donde  $\Gamma$  es su 1-esqueleto con  $\ell$  aristas, y tenemos  $v$  vértices y  $r$  caras. Vamos a definir un grupo de tal forma que para arista (orientada) tomamos un generador y para cada vértice tomamos una relación:

$$G_\Gamma = \langle g_\ell, \ell \in \mathcal{L} \mid R_{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \rangle.$$

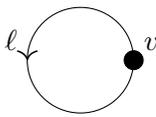
Dos aristas opuestas corresponden a generadores inversos uno del otro. La relación  $R_{\mathbf{v}}$  involucra los generadores  $g_{\ell_j}$  correspondientes a las aristas  $\ell_j$  con  $h = 1, \dots, n$ , y es  $\prod_{i=1}^n g_{\ell_i} = 1$ , con el siguiente orden:



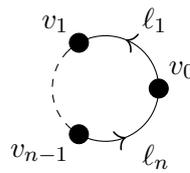
**Proposición 3.8.** Con las condiciones anteriores,  $G_\Gamma \cong \mathbb{F}_r$ , donde  $r$  es el número de caras.

*Demostración.* Distinguimos varios casos.

- Caso de 1 vértice y 1 cara. Así,  $\vec{\ell}\vec{\ell}^{-1} = 1$ , por lo tanto,  $G_\Gamma = \langle g_{\vec{\ell}} \mid - \rangle$  (Figura 3.1a).
- Si añadimos vértices en la frontera. Así, obtenemos las relaciones:  $\vec{\ell}_1\vec{\ell}_2^{-1} = 1, \vec{\ell}_2\vec{\ell}_3^{-1} = 1, \dots, \vec{\ell}_{n-1}\vec{\ell}_n^{-1} = 1 \Rightarrow \vec{\ell}_1 = \vec{\ell}_2 = \dots = \vec{\ell}_n$ , por lo tanto,  $G_\Gamma = \langle g_{\vec{\ell}_1} \mid - \rangle$  ya que son todas relaciones de igualdad, así que añadiendo únicamente vértices, no cambia el grupo. (Figura 3.1b)



(a) Caso 1 vértice y 1 cara



(b) Caso añadiendo vértices en frontera

Figura 3.1

- Consideremos ahora el grafo  $\Gamma$  de la Figura 3.2, donde  $\ell_1, \dots, \ell_n$  son aristas del borde y sea  $\Gamma'$  el grafo que se obtiene al añadir a  $\Gamma$  una arista y una cara. Para  $\Gamma'$  renombramos los generadores  $\vec{\ell}'_j = \vec{\ell}_j$  y los vértices  $v'_j = v_j$  (Figura 3.3). Veamos las relaciones entre ambos grupos. Estudiemos primero las relaciones  $R_{v_j}(\vec{\ell})$  para  $\Gamma$ .

Sea  $\omega_j(\vec{\ell})$  el producto de las aristas inferiores adyacentes a  $v_j$ , las relaciones  $R_{v_j}(\vec{\ell})$  vendrán dadas por:

$$\left. \begin{aligned} j = 0 : & \quad \vec{\ell}_1\omega_0(\vec{\ell}) = 1 \\ 0 < j < n : & \quad \vec{\ell}_{j+1}\omega_j(\vec{\ell})\vec{\ell}_j^{-1} = 1 \\ j = n : & \quad \omega_n(\vec{\ell})\vec{\ell}_n^{-1} = 1 \end{aligned} \right\}$$

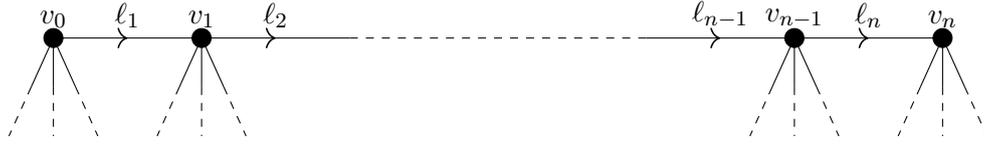


Figura 3.2

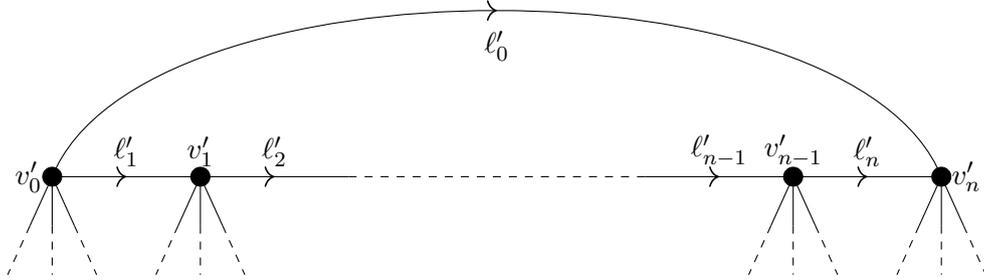


Figura 3.3

Estudiemos ahora las relaciones  $R_{v'_j}(\vec{\ell}')$  correspondientes a  $\Gamma'$ :

$$\left. \begin{aligned} j = 0 : & \quad \vec{\ell}'_0^{-1} \vec{\ell}'_1 \omega_0(\vec{\ell}') = 1 \\ 0 < j < n : & \quad \vec{\ell}'_{j+1} \omega_j(\vec{\ell}') \vec{\ell}'_j^{-1} = 1 \\ j = n : & \quad \omega_n(\vec{\ell}') \vec{\ell}'_n^{-1} \vec{\ell}'_0 = 1 \end{aligned} \right\}$$

Para cada arista de  $\Gamma'$ , denotamos  $\vec{\ell}'' = \vec{\ell}'$  si  $\ell'' \neq \ell'_1, \ell'_n$  mientras que  $\vec{\ell}''_j = \vec{\ell}'_0^{-1} \vec{\ell}'_j$  si  $j = 1, n$ . Notemos que hemos obtenido otro sistema generador para  $G_{\Gamma'}$  en el que las relaciones se expresan como:

$$\left. \begin{aligned} j = 0 : & \quad \vec{\ell}''_1 \omega_0(\vec{\ell}'') = 1 \\ 0 < j < n : & \quad \vec{\ell}''_{j+1} \omega_j(\vec{\ell}'') \vec{\ell}''_j^{-1} = 1 \\ j = n : & \quad \omega_n(\vec{\ell}'') \vec{\ell}''_n^{-1} = 1 \end{aligned} \right\}$$

donde  $\vec{\ell}''_0$  no aparece nunca. Por :  $G_{\Gamma'}(\ell') = G_{\Gamma} * \mathbb{Z}_{\vec{\ell}''_0}$ .

Reiterando esto, vemos que sólo se añaden generadores cuando añadimos caras, así que el grupo fundamental de cualquier grafo con estas condiciones, será el grupo libre de rango su número de caras. Además se comprueba con el mismo sistema que es posible multiplicar conjugados de cada relación de manera que el producto es trivial en el grupo libre, es decir, una de las relaciones es consecuencia de las demás  $\square$

Vamos a definir un homomorfismo  $\Phi : G_{\Gamma} \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$ . Comenzamos construyendo un homomorfismo  $\tilde{\Phi}$  en el grupo libre engendrado por las aristas orientadas (una orientación por arista).

Sea  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ , consideramos  $x_0 = (0, 0, M)$  con  $M \gg 0$ . Para cada arista  $\vec{\ell} \in \mathcal{L}$ , tomamos un punto  $x_{\vec{\ell}} \in \text{Int}(\vec{\ell})$  y centrados en este  $x_{\vec{\ell}}$  construimos un disco orientado  $\beta_{\vec{\ell}}$  (orientado con la regla del sacacorchos para respetar la orientación de  $\vec{\ell}$ ) de radio  $\epsilon_{\vec{\ell}}$  lo suficientemente pequeño como para que  $\beta_{\vec{\ell}}$  no rodee ni toque a ninguna arista que no sea  $\vec{\ell}$ . Ahora, desde  $x_0$  trazamos caminos  $\alpha_{\vec{\ell}}$  en el semiespacio superior que unen  $x_0$  con cada  $\beta_{\vec{\ell}}$ . Definimos los lazos  $\tilde{\Phi}(\vec{\ell}) := \gamma_{\vec{\ell}} = \alpha_{\vec{\ell}} \cdot \beta_{\vec{\ell}} \cdot \alpha_{\vec{\ell}}^{-1}$ .

Veamos que cualquier lazo de  $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$  se pueden poner como producto de estos  $\gamma_{\vec{\ell}}$ . Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$  y consideramos  $\Gamma \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\} \Rightarrow \text{Im } \gamma \cap \{z = 0\} = \{P_1, \dots, P_r\}$ . Por inducción sobre  $r$  observamos que solo puede haber un número par de puntos.

- $r = 0 \Rightarrow \gamma = e$ .
- $r \geq 2$ : Sean  $\ell_1, \dots, \ell_m$  las que separan  $P_{r-1}$  de  $P_r \{z = 0\}$ . Podemos descomponer  $\gamma \simeq \tilde{\gamma} \prod_{j=1}^m \gamma_{\tilde{\ell}_j}$  y hay  $r - 2$  puntos en el plano  $\{z = 0\}$  para  $\tilde{\gamma}$ , por lo que se procede por inducción.

Hemos visto que  $\tilde{\Phi}$  es sobreyectivo. Recordemos que  $G_\Gamma$  es el cociente de  $\mathbb{F}_\Gamma$  (el grupo libre engendrado por las aristas) por el menor subgrupo normal que contiene a  $\langle R_v \rangle$ . Como  $\tilde{\Phi}(R_v) = 1 \Rightarrow R_v \in \ker(\tilde{\Phi})$ . Como el subgrupo fundamental que engendra también está contenido en  $\ker(\tilde{\Phi})$ , entonces  $\tilde{\Phi}$  induce el epimorfismo  $\Phi$ .

Además, sabemos que  $G_\Gamma$  y  $\Pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$  tienen el mismo rango, ya que son isomorfos a  $\mathbb{F}_r$ , el morfismo es sobreyectivo y como además  $\mathbb{F}_r$  es hopfiano (es decir, no es isomorfo a alguno de sus cocientes)  $\Rightarrow \Phi$  es un isomorfismo.

### 3.3. Grupo del complementario de un grafo no acotado

En esta sección  $\Gamma$  es un grafo plano no compacto, unión de un grafo  $\Gamma_0$  (grafo compacto en el interior de una cierta bola) y un número finito de *rayos*, semirrectas con origen en un vértice de  $\partial D$  y que salen de dicha bola.

**Proposición 3.9.** *Con las condiciones anteriores, donde el disco asociado a  $\Gamma_0$  tiene  $r$  caras y hay  $m$  rayos, se tiene*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \cong \mathbb{F}_{r+(m-1)}$$

*Demostración.* La demostración es análoga a la del caso acotado pero definiendo los conjuntos  $Y$  de la siguiente forma:

$$\begin{cases} Y_0 \cong \partial(D \times [-1, 1]) \setminus \Gamma \cong \mathbb{S}^2 \setminus \{m \text{ puntos}\} \\ Y_j = Y_{j-1} \cup \overline{U}(C_j) \end{cases}$$

La diferencia viene de que  $Y_0 = \partial(D \times [-1, 1]) \setminus \Gamma \cong \mathbb{S}^2 \setminus \{r + 1 \text{ puntos}\}$ , por lo que en el punto de partida,  $\pi_1(Y_0) \cong \mathbb{F}_r$ . □

Se define análogamente un grupo combinatorio y un isomorfismo con el grupo del complementario.

#### 3.3.1. Presentación de Wirtinger para rectas

Dado un enlace de rectas  $L$  en  $\mathbb{R}P^3$ , consideremos su intersección con un espacio afín  $\mathbb{R}^3$ . Para calcular  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$  usaremos la presentación de Wirtinger en los cruces de las rectas.

**Definición 3.10.** Una *presentación de Wirtinger* de un grupo  $G$  es una presentación finita en la que las relaciones entre los  $k$  generadores son de la forma  $g_j = w(g)g_iw(g)^{-1}$  con  $j, i = 0, 1, \dots, k$  y donde  $w(g)$  es una palabra en los generadores  $\{g_1, \dots, g_k\}$ .

Los enlaces y nudos en  $\mathbb{S}^3$  tienen una presentación de Wirtinger que se deduce a partir de la aplicación  $\Phi$  de la sección 3.2. Para las rectas utilizamos la generalización de este morfismo a los grafos no acotados.

Sea  $L$  un enlace de rectas, y consideremos su intersección con  $\mathbb{R}^3$  y su proyección a  $\mathbb{R}^2$  que nos da lugar a un grafo  $\Gamma$  no acotado. Señalando en los cruces del grafo qué recta va por arriba y cuál por debajo obtenemos un diagrama que determina la topología del encaje de  $L$ . Sea  $x_0$  un punto fuera del enlace. Asociamos un generador a cada componente conexa del diagrama determinado por  $\Gamma$  y los cruces, tomando las relaciones de la Figura 3.4a.

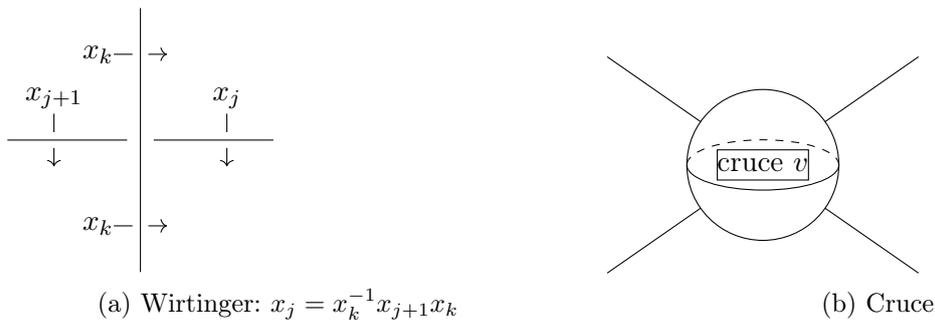


Figura 3.4

Para ver que esta presentación consideramos la presentación de  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$  asociada a la generalización de  $\Phi$ . Mediante el Teorema de Seifert-Van Kampen, obtenemos:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \cong \pi_1\left(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \cup \left(\bigcup_{v \in \Gamma} \dot{B}_v\right)\right),$$

donde  $B_v$  es una bola *pequeña* centrada en el vértice  $v$ , como se muestra en la Figura 3.4b. Para recuperar  $\mathbb{R}^3 \setminus L$ , volvemos a introducir las bolas pero con los cruces de la Figura 3.4a.

$$\mathbb{R}^3 \setminus L \cong \left(\mathbb{R}^3 \setminus \left(\Gamma \cup \left(\bigcup_{v \in \Gamma} \dot{B}_v\right)\right)\right) \cup \left(\bigcup_{v \in \Gamma} (B \setminus L)\right)$$

Aplicando de nuevo el Teorema de Seifert-van Kampen obtenemos la presentación de Wirtinger buscada. Sin embargo, esta presentación es difícil de manejar (ver Figura 3.5b), por lo que la transformaremos en otra más adecuada.

Podemos asumir que ninguna recta es horizontal (si alguna lo fuese podemos moverla un poco de forma que deje de serlo y el enlace no cambie) y fijemos  $B$  una bola que abarque todos los cruces de  $L$  como en la Figura 3.5a.

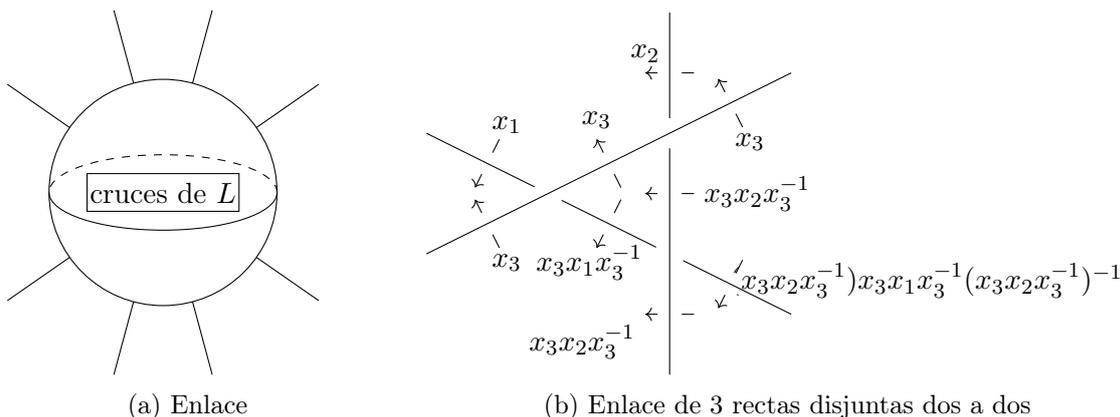


Figura 3.5

A partir de las intersecciones los hemisferios de  $\partial B$  (Figura 3.6), podemos ver fácilmente que  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$  es libre (de rango el número de rectas), y que está engendrado por los generadores asociados a los rayos que cortan el hemisferio sur (o el norte). Las relaciones de Wirtinger permiten expresar los generadores del sur en función de los del norte y viceversa. Veremos cómo en las secciones siguientes.

### 3.4. Trenzas

Ademas del método que nos da Wirtinger para ver las relaciones entre ambas bases de generadores, también podemos servirnos de una trenza cuyos hilos representen las rectas de cada de enlace. De esta manera, en el cálculo del grupo fundamental de complementos de rectas en  $\mathbb{RP}^3$ , siempre nos podemos remitir a la Figura 3.6.

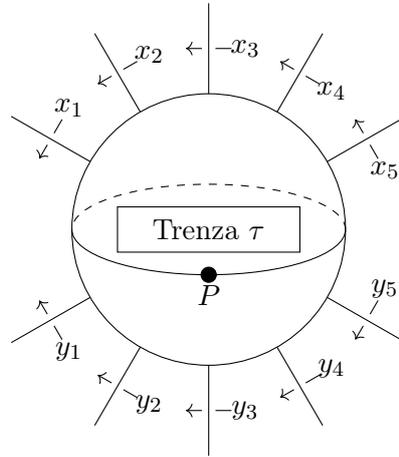


Figura 3.6: Rectas

De manera general, denotaremos  $x_1, \dots, x_r$  los generadores en el hemisferio norte, mientras que los generadores del hemisferio sur son  $y_1, \dots, y_r$ . Es fácil ver que  $x_r \cdot \dots \cdot x_1 = y_r \cdot \dots \cdot y_1$  y que  $x_j$  e  $y_{r-j+1}$  son conjugados.

Consideremos el grupo de trenzas  $\mathbb{B}_r$  [1] con presentación

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{r-1} \left| \begin{array}{l} [\sigma_i, \sigma_j] = 1, \\ j-1 > i \end{array} \right. \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \right. \left. \begin{array}{l} 1 \leq i < r-1 \end{array} \right\rangle$$

y el grupo libre  $\mathbb{F}_r$  con generadores  $x_1, \dots, x_r$ . La acción de Artin del grupo de trenzas sobre el grupo libre viene definida por

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_r \times \mathbb{F}_r &\longrightarrow \mathbb{F}_r \\ (x_i, \sigma_j) &\longmapsto x_i^{\sigma_j} = x_i \text{ si } i - j \neq 0, 1 \\ (x_i, \sigma_i) &\longmapsto x_i^{\sigma_i} = x_{i+1} \\ (x_{i+1}, \sigma_i) &\longmapsto x_{i+1}^{\sigma_i} = x_{i+1} \cdot x_i \cdot x_{i+1}^{-1} \end{aligned}$$

Esta acción cumple que  $\forall \tau \in \mathbb{B}_r, \{x_1^\tau, \dots, x_r^\tau\}$  son conjugados de  $\{x_1, \dots, x_r\}$  (puede que en distinto orden) y que  $(x_r \cdot \dots \cdot x_1)^\tau = x_r \cdot \dots \cdot x_1$ . Recordemos que si  $\Delta$  es el elemento del grupo de trenzas que representa la *media vuelta*, entonces  $\Delta^2$  engendra el centro del grupo. Podemos escribir:

$$\Delta = (\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_{r-1}) \cdot (\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_{r-2}) \cdot \dots \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \cdot \sigma_1.$$

Así,

$$x_1^\Delta = x_r, \quad x_2^\Delta = x_r \cdot x_{r-1} \cdot x_r^{-1}, \dots, x_r^\Delta = (x_r \cdot \dots \cdot x_2) \cdot x_1 \cdot (x_r \cdot \dots \cdot x_2)^{-1}$$

por lo que

$$x_j^{(\Delta^2)} = (x_r \cdot \dots \cdot x_1) \cdot x_j \cdot (x_r \cdot \dots \cdot x_1)^{-1}$$

Con esta definición, considerando la trenza infinita, podemos calcular el grupo fundamental de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{n \text{ rectas}\}$  de la siguiente forma:

$$\pi_1 \left( \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^n L_j \right) = \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \mid y_j = x_j^\tau \rangle$$

manteniendo la notación y siendo  $L_j$  cada una de las  $n$  rectas.

### 3.4.1. Representación del *join* y del derivado de un enlace mediante trenzas

En el capítulo 2.3, hemos introducido un símbolo para representar enlaces de rectas mediante una permutación, al que hemos denominado *join*. De acuerdo con el esquema representado en la Figura 2.3, que representaría el enlace cuyo *join* sería  $jc((3, 5)(4, 6))$  y teniendo en cuenta lo que sabemos acerca del número de enlace de cada cruce (sección 2.3), podemos calcular su trenza, que sería:

$$\sigma_4 \sigma_3 \sigma_5 \sigma_4 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_4^{-1}.$$

Así podemos calcular de manera bastante sencilla la **trenza de un enlace a partir de su *join***.

Consideremos ahora el espacio  $\mathbb{RP}^3 \setminus \mathbf{L}$ , siendo  $\mathbf{L}$  un enlace de rectas. Podemos tomar una recta  $r$  de dicho enlace como eje de un hiperboloide  $h' : x^2 + y^2 = \varepsilon(z^2 + t^2)$  el cual, eligiendo una  $\varepsilon$  adecuada, podemos hacer todo lo *delgado* que queramos, de tal forma que separe a  $r$  del resto de las rectas de  $\mathbf{L}$ . Ahora, podemos añadir rectas a la frontera de  $h'$  de dos formas distintas, según queramos que el número de enlace con  $r$  sea 1 ó  $-1$ , y crear a partir de un enlace mas pequeño (de menos rectas), otro mayor. Este procedimiento se basa en la idea de de enlace derivado dada en el capítulo 2.2, y podemos representarlo con trenzas de la siguiente forma:

Supongamos que partimos del enlace formado por las rectas  $r$  y  $t$  y a cada una de ellas le asociamos un símbolo como en la Figura 3.7a. Ahora realizamos en cada recta un cruce con el número de enlace y el número de rectas que nos indica el símbolo en cada caso (Figura 3.7b). Ya sólo nos queda completar el enlace respetando el signo de los cruces del enlace de partida (Figura 3.7c).

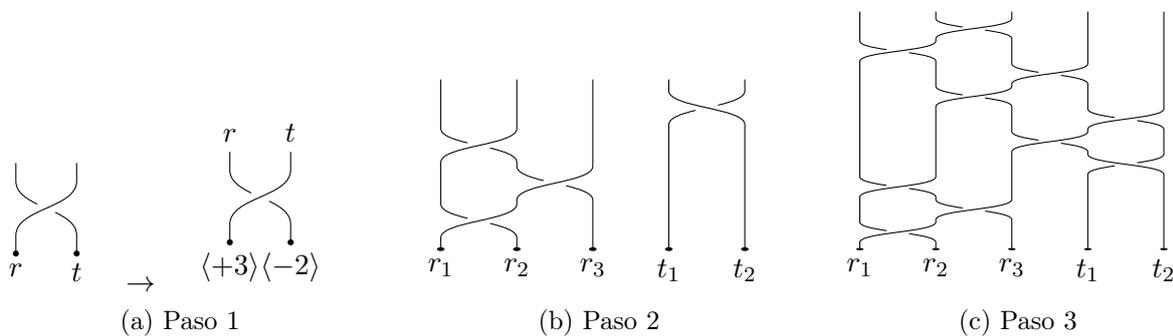


Figura 3.7

Así hemos obtenido un enlace de 5 rectas, cuyo derivado era el original de las rectas  $t$  y  $s$  y con símbolo  $\langle \langle +3 \rangle, \langle -2 \rangle \rangle$ . De esta forma podemos obtener la **trenza de un enlace a partir de su enlace derivado**.

### 3.5. Grupo fundamental en el espacio proyectivo. Polinomios de Alexander, de Jones y de Homfly

Recordando que para estudiar este caso nos podemos remitir a la Figura 3.6 y manteniendo la misma notación que en el apartado anterior, vamos a representar la situación en el infinito, donde el plano proyectivo lo vemos como la proyección ortogonal del hemisferio norte. La situación se ve en la Figura 3.8.

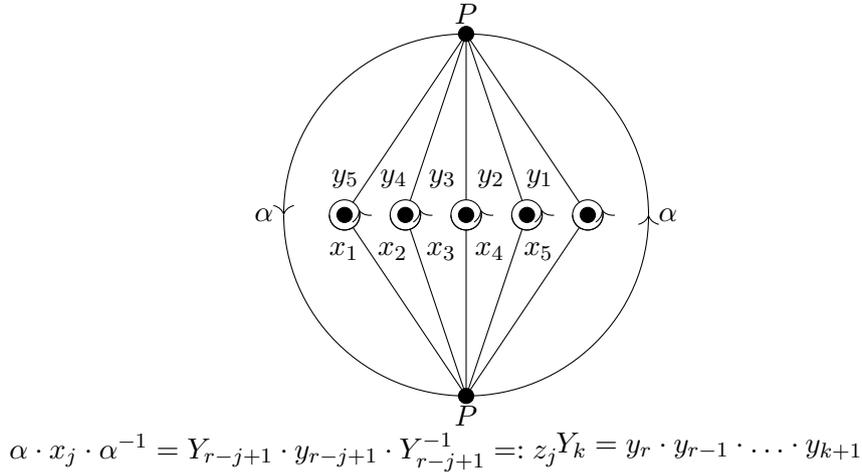


Figura 3.8: Rectas

Nuestra intención es utilizar Seifert-Van Kampen para calcular el grupo fundamental de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3 \setminus \{n \text{ rectas}\}$ , para ello descomponemos dicho espacio como sigue:

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^n L_j = X \cup Y \text{ con } \begin{cases} X = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^n L_j \\ Y = (\mathbb{R}\mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{B}_R^3) \setminus \bigcup_{j=1}^n L_j \end{cases}$$

Siendo  $\mathbb{B}_R^3$  una esfera de dimensión 4 y de radio  $R \gg 0 \Rightarrow Y \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}_\infty^2 \setminus \bigcup_{j=1}^n L_j$ .

Así:  $X \cap Y = (\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B}_R^3) \setminus \bigcup_{j=1}^n L_j \simeq \mathbb{S}_R^2 \setminus \bigcup_{j=1}^n L_j$ . En el apartado anterior ya calculamos el grupo fundamental de  $X$ , que era:

$$\pi_1(X) = \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \mid x_j = y_j^\tau \rangle$$

Sabemos también que:

$$\pi_1(Y) = \langle x_1, \dots, x_n, \alpha \mid x_1 \cdot \dots \cdot x_n = \alpha^2 \rangle$$

De la Figura 3.8, deducimos que:

$$\pi_1(X \cap Y) = \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \mid x_1 \cdot \dots \cdot x_n \cdot y_1 \cdot \dots \cdot y_n = 1 \rangle$$

Así, utilizando Seifert-Van Kampen, podemos calcular que el grupo fundamental del complementario de las rectas en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$  es

$$\pi_1 \left( \mathbb{R}\mathbb{P}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^n L_j \right) = \left\langle x_1, \dots, x_r, \alpha \mid x_r \cdot \dots \cdot x_1 = \alpha^2, \quad \alpha \cdot x_i \cdot \alpha^{-1} = x_i^{\Delta \cdot \tau} \right\rangle_{1 \leq i \leq r}$$

Para comparar los enlaces de rectas, vamos a utilizar el *polinomio de Alexander multivariable*. Antes, observar que  $\mathbb{S}^3$  es una cubierta de dos hojas de  $\mathbb{RP}^3$  mediante una aplicación  $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$ ; los enlaces de rectas de  $\mathbb{RP}^3$  determinan enlaces de curvas no anudadas en  $\mathbb{S}^3$ .

Sea  $H \subset \mathbb{S}^3$  un enlace representado como cierre de una trenza  $\tau \in \mathbb{B}_d$ . Hay un homomorfismo de grupos  $\beta_d : \mathbb{B}_d \rightarrow GL(d-1; \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ , llamado *representación de Burau*, que asigna al generador  $\sigma_i$  una modificación de la identidad  $I_{d-1}$  en la que los elementos  $(i-1, i, i+1)$  de la fila  $i$ -ésima se reemplazan por  $(t, -t, 1)$ . El polinomio

$$\Delta(t) = \frac{\det(\beta_d(\sigma) - I_{d-1})(t-1)}{(t^d - 1)}$$

no depende de la trenza elegida y se llama el *polinomio de Alexander* del enlace. Cuando un enlace tiene varias componentes, lo podemos generalizar al polinomio de Alexander multivariable.

Tomamos ahora  $L \subseteq \mathbb{S}^3$  un enlace de  $r$  componentes,  $L = \tilde{\sigma}$  trenza cerrada con  $\sigma \in \mathbb{B}_d^{a_1, \dots, a_r}$ , siendo  $\mathbb{B}_d^{a_1, \dots, a_r}$  el conjunto de las trenzas que tienen los  $a_1$  primeros hilos cerrados entre sí, los  $a_2$  siguientes hilos cerrados entre sí,  $\dots$  y los  $a_r$  últimos hilos cerrados entre sí. Observemos que  $a_1 + \dots + a_r = d$ .

Generalizamos, siguiendo [9], el homomorfismo anterior a

$$\beta_d^{a_1, \dots, a_r} : \mathbb{B}_d^{a_1, \dots, a_r} \rightarrow GL(d-1; \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}])$$

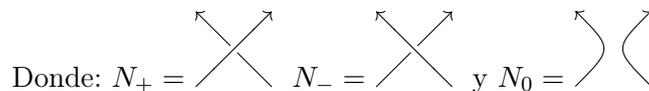
definido como antes pero ahora asignando un *color* (o variable distinta) a cada tipo de hilo,. En este caso, si un cruce  $\sigma_j$  en el que el hilo  $j$  tiene color  $i$ , le asignamos la matriz anterior, pero cambiando las posiciones  $(j-1, j, j+1)$  por  $(t_i, -t_i, 1)$ . El **polinomio multivariable de Alexander** es

$$\Delta(t) = \frac{\det(\beta_d^{a_1, \dots, a_r}(\sigma) - I_{d-1})}{(t_1^{a_1} \dots t_r^{a_r} - 1)}$$

Hay otros invariantes polinómicos de enlaces que son más potentes El *polinomio de Jones* se puede definir a partir del *Corchete de Kauffman* [5].

**Definición 3.11.** El **polinomio de Jones** de un nudo orientado  $N$ , es el polinomio de Laurent determinado por:

- i)  $V_{\bigcirc}(t) = 1$
- ii)  $t^{-1}V_{N_+}(t) - tV_{N_-}(t) = \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{N_0}(t)$



Para calcular el polinomio de Jones de nuestros enlaces, vamos a utilizar **Sagemath**, pero dada la cantidad de cruces de los nudos que formamos, se tarda demasiado tiempo en calcular dicho polinomio, para ello, vamos a obtener el polinomio de Jones a partir de otro polinomio invariante, el polinomio de Homfly, definido en [4].

El polinomio de Homfly es una generalización del polinomio de Jones, utilizando la misma notación que en el capítulo anterior, podemos definirlo como sigue.

**Definición 3.12.** El **polinomio de Homfly** en las variables  $a$  y  $z$  de un enlace  $K$  se define como:

- i)  $P_{\bigcirc}(t) = 1$
- ii)  $aP_{K_+}(t) - a^{-1}P_{K_-} - zP_{K_0}$

donde  $K_+$ ,  $K_-$  y  $K_0$  son como en 3.11.

Este polinomio le resulta más fácil de calcular a **Sagemath**, y a partir de él podemos obtener el polinomio de Jones mediante un cambio de variable:

$$V(t) = P\left(a = t^{-1}, z = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (3.1)$$

### 3.6. Distinguir los enlaces $M$ y $M'$ de seis rectas.

En la sección 2.6 se pospuso la demostración de la distinción topológica de los enlaces  $M$  y  $M'$ . Veamos que utilizando estos polinomios sí que obtenemos invariantes distintos, por lo tanto, son distintos.

Podemos calcular el polinomio de Homfly en Sage a partir de la trenza de cada enlace y después aplicando el cambio dado en 3.1 obtenemos su polinomio de Jones, obtenemos así los siguientes polinomios. Para  $M$ :

$$-\frac{(7t^{11} + 5t^{10} - 37t^9 + 85t^8 - 114t^7 + 130t^6 - 132t^5 + 126t^4 - 89t^3 + 45t^2 - 11t + 1)(t^2 + 1)}{t^{32}}.$$

Se trata de un invariante de enlaces orientados; si cambiamos a una de las otras  $2^6$  orientaciones obtenemos ese mismo polinomio multiplicado por una potencia de  $t$ .

Para  $M'$ :

$$-(t^{11} - 11t^{10} + 45t^9 - 89t^8 + 126t^7 - 132t^6 + 130t^5 - 114t^4 + 85t^3 - 37t^2 + 5t + 7)(t^2 + 1)t^5;$$

como antes, dependiendo de la orientación, puede salirnos ese mismo polinomio multiplicado por una potencia de  $t$ .

Por lo tanto, vemos claramente que son dos enlaces distintos. Pero estos polinomios son distintos para cada orientación que tomemos en cada recta, por lo tanto, tenemos que comprobar que para cualquier orientación, los polinomios son distintos.

Para ello hemos creado un programa de **Sagemath** un programa que nos calcula todas las orientaciones posibles para un enlace y hemos calculado el polinomio de Jones para cada orientación y hemos comprobado que, en efecto, no coinciden para ninguna orientación. Por lo que podemos asegurar que son enlaces distintos.



# Bibliografía

- [1] E. Artin, *Theory of braids*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 101–126.
- [2] A. Borobia and V.F. Mazurovskii, *Nonsingular configurations of 7 lines of  $\mathbb{RP}^3$* , J. Knot Theory Ramifications **6** (1997), no. 6, 751–783.
- [3] Yu.V. Drobotukhina, *An analogue of the Jones polynomial for links in  $\mathbb{RP}^3$  and a generalization of the Kauffman-Murasugi theorem*, Leningrad Math. J. **2** (1991), no. 3, 613–630.
- [4] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W B.R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu, *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 2, 239–246.
- [5] L.H. Kauffman, *State models and the Jones polynomial*, Topology **26** (1987), no. 3, 395–407.
- [6] V.F. Mazurovskii, *Configurations of six skew lines*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **167** (1988), no. Issled. Topol. 6, 121–134, 191.
- [7] ———, *Kauffman polynomials of nonsingular configurations of projective lines*, Uspekhi Mat. Nauk **44** (1989), no. 5(269), 173–174.
- [8] ———, *Configurations of at most 6 lines of  $\mathbf{RP}^3$* , 1992, pp. 354–371.
- [9] H.R. Morton, *The multivariable Alexander polynomial for a closed braid*, Low-dimensional topology (Funchal, 1998), Contemp. Math., vol. 233, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 167–172.
- [10] O.Ya. Viro and Yu.V. Drobotukhina, *Configurations of skew-lines*, Leningrad Math. J. **1** (1990), no. 4, 1027–1050, disponible en <http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/skewlines.pdf>.



# Anexo A

## A.1. Tablas de Enlaces de 6 Rectas

Tabla 1: Enlaces  $L$  y  $L'$

<b>Recta:</b>	1	2	3	4	5	6
<b>Ternas +:</b>	3	5	3	4	5	4
<b>Enlace:</b>	$\langle\langle-3\rangle, \langle+2\rangle\rangle$	indesc.	$\langle\langle-3\rangle, \langle+2\rangle\rangle$	$\langle+\langle 1\rangle, \langle-2\rangle, \langle-2\rangle\rangle$	indesc.	$\langle+\langle 1\rangle, \langle-2\rangle, \langle-2\rangle\rangle$

<b>Recta:</b>	1	2	3	4	5	6
<b>Ternas +:</b>	7	5	7	6	5	6
<b>Enlace:</b>	$\langle\langle+3\rangle, \langle-2\rangle\rangle$	indesc.	$\langle\langle+3\rangle, \langle-2\rangle\rangle$	$\langle-\langle 1\rangle, \langle+2\rangle, \langle+2\rangle\rangle$	indesc.	$\langle-\langle 1\rangle, \langle+2\rangle, \langle+2\rangle\rangle$

Tabla 2: Enlace  $jc((2, 3, 5, 6, 4))$  y  $jc((3, 4, 6, 5))$

<b>R.:</b>	1	2	3	4	5	6
<b>T. +:</b>	6	4	5	4	6	5
<b>E.:</b>	$\langle-\langle 1\rangle, \langle+2\rangle, \langle+2\rangle\rangle$	$\langle+\langle 1\rangle, \langle-2\rangle, \langle-2\rangle\rangle$	in.	$\langle+\langle 1\rangle, \langle-2\rangle, \langle-2\rangle\rangle$	$\langle-\langle 1\rangle, \langle+2\rangle, \langle+2\rangle\rangle$	in.

<b>Recta:</b>	1	2	3	4	5	6
<b>Ternas +:</b>	5	5	3	4	4	3
<b>Enlace:</b>	indesc.	indesc.	$\langle\langle-3\rangle, \langle+2\rangle\rangle$	$\langle-\langle 1\rangle, \langle+2\rangle, \langle+2\rangle\rangle$	$\langle-\langle 1\rangle, \langle+2\rangle, \langle+2\rangle\rangle$	$\langle\langle-3\rangle, \langle+2\rangle\rangle$

Tabla 3: Enlace  $jc((1, 5, 2, 3, 6))$

<b>Recta:</b>	1	2	3	4	5	6
<b>Ternas +:</b>	5	5	7	6	6	7
<b>Enlace:</b>	indesc.	indesc.	$\langle\langle+3\rangle, \langle-2\rangle\rangle$	$\langle+\langle 1\rangle, \langle-2\rangle, \langle-2\rangle\rangle$	$\langle+\langle 1\rangle, \langle-2\rangle, \langle-2\rangle\rangle$	$\langle\langle+3\rangle, \langle-2\rangle\rangle$

## A.2. Trenzas y polinomios de Alexander de enlaces

Vamos a representar en forma de trenza y calcular el polinomio de Alexander de los distintos tipos de enlaces compuestos por tres, cuatro, cinco y seis rectas.

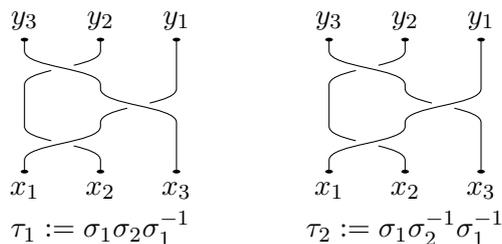
**Enlaces de tres rectas:**

Figura 9: Trenzas para tres rectas

Si calculamos sus polinomios de Alexander obtenemos respectivamente:

$$\tau_1 \mapsto (-t_0 t_1 + t_2), \quad \tau_2 \mapsto (t_1 t_2 - t_0).$$

**Enlaces de cuatro rectas:**

Las trenzas de éstos enlaces se representan en la Figura 10

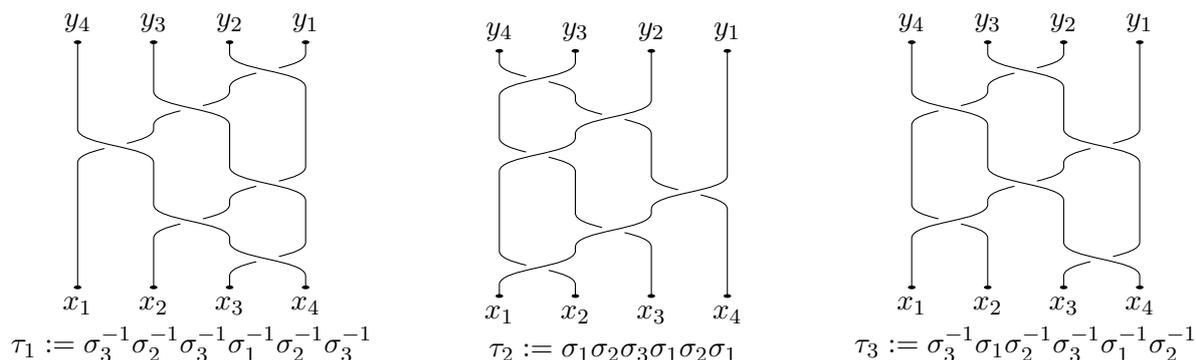


Figura 10: Trenzas para cuatro rectas

Si calculamos sus polinomios de Alexander obtenemos respectivamente:

$$\tau_1 \mapsto (-1) \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 - 1)^2, \quad \tau_2 \mapsto (t_0 t_1 t_2 t_3 - 1)^2, \quad \tau_3 \mapsto (-1) \cdot (-t_0 t_1 + t_2 t_3) \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 - 1).$$

**Enlaces de cinco rectas:**

Hemos visto en el primer capítulo, que hay siete enlaces de cinco rectas, uno de ellos es anfiqueiral (Figura 11).

El resto son no-anfiqueirales y se corresponden, agrupados cada uno con su imagen espejo, con los símbolos:

$$\begin{cases} \langle +5 \rangle \Rightarrow \tau_2 := \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \\ \langle -5 \rangle \Rightarrow \tau_3 := \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle \langle +3 \rangle, \langle -2 \rangle \rangle \Rightarrow \tau_4 := \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_4^{-1} \sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \\ \langle \langle -3 \rangle, \langle +2 \rangle \rangle \Rightarrow \tau_5 := \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \end{cases}$$

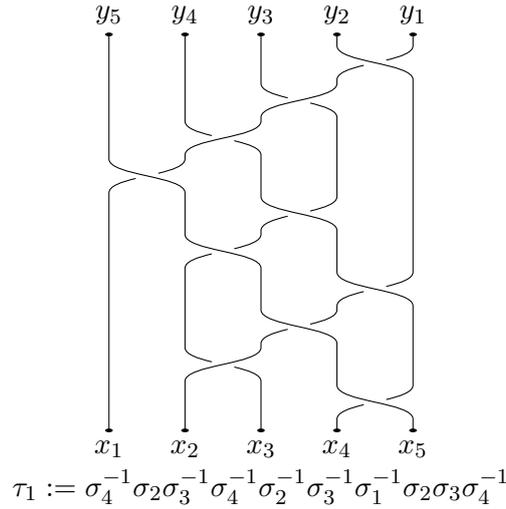


Figura 11: enlace anfiqueiral de cinco rectas

$$\begin{cases} \langle +\langle 1 \rangle, \langle -2 \rangle, \langle -2 \rangle \rangle \Rightarrow \tau_6 := \sigma_2^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \\ \langle -\langle 1 \rangle, \langle +2 \rangle, \langle +2 \rangle \rangle \Rightarrow \tau_7 := \sigma_2 \sigma_4 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \end{cases}$$

Si calculamos sus polinomios de Alexander obtenemos respectivamente:

$$\tau_1 \mapsto (-1) \cdot (t_2 t_3 t_4 - t_0 t_1) \cdot (t_0 t_3 t_4 - t_1 t_2) \cdot (t_1 t_2 t_3 t_4 - t_0)$$

$$\begin{cases} \tau_2 \mapsto (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 - 1)^3 \\ \tau_3 \mapsto (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 - 1)^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_4 \mapsto (-1) \cdot (-t_0 t_1 t_2 + t_3 t_4) \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 - 1)^2 \\ \tau_5 \mapsto (-t_0 t_1 t_2 + t_3 t_4)^2 \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_6 \mapsto (-1) \cdot (-t_0 t_1 t_2 + t_3 t_4) \cdot (t_0 t_3 t_4 - t_1 t_2) \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 - 1) \\ \tau_7 \mapsto (-1) \cdot (-t_0 t_1 t_2 + t_3 t_4) \cdot (t_0 t_3 t_4 - t_1 t_2) \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 - 1) \end{cases}$$

### Enlaces de seis rectas:

Los enlaces de seis rectas son 19 en total, 12 de ellos son totalmente descomponibles y 2 de estos son anfiqueirales:

$$\tau_1 := \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_5^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

$$\tau_2 := \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_4 \sigma_5 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

El resto son no-anfiqueirales y si los juntamos por imágenes de espejo, sus símbolos son:

$$\begin{cases} \langle -6 \rangle \Rightarrow \tau_3 := \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \\ \langle +6 \rangle \Rightarrow \tau_4 := \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle \langle +2 \rangle, \langle -4 \rangle \rangle \Rightarrow \tau_5 := \sigma_1 \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \\ \langle \langle +4 \rangle, \langle -2 \rangle \rangle \Rightarrow \tau_6 := \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_5^{-1} \sigma_4 \sigma_5 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle +\langle -3 \rangle, \langle -2 \rangle, \langle 1 \rangle \rangle \Rightarrow \tau_7 := \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \\ \langle -\langle +3 \rangle, \langle +2 \rangle, \langle 1 \rangle \rangle \Rightarrow \tau_8 := \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle -\langle +2 \rangle, \langle +2 \rangle, \langle -2 \rangle \rangle \Rightarrow \tau_9 := \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \\ \langle +\langle +2 \rangle, \langle -2 \rangle, \langle -2 \rangle \rangle \Rightarrow \tau_{10} := \sigma_1 \sigma_3^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle +\langle -2 \rangle, \langle -2 \rangle, \langle -2 \rangle \rangle \Rightarrow \tau_{11} := \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \\ \langle -\langle +2 \rangle, \langle +2 \rangle, \langle +2 \rangle \rangle \Rightarrow \tau_{12} := \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \end{cases}$$

Los restantes 7, son no descomponibles. Uno de ellos es anfiqueiral:

$$\tau_{13} := \sigma_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_5 \sigma_2^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_5^{-1}$$

Los otros 6 son no-anfiqueirales, están definidos en la sección 2.6:

$$\begin{cases} \text{jc}((3, 4, 6, 5)) \Rightarrow \tau_{14} := \sigma_3 \sigma_5 \sigma_4 \sigma_2^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_4^{-1} \\ \text{jc}((1, 5, 2, 3, 6)) \Rightarrow \tau_{15} := \sigma_3^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_2 \sigma_5 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L \Rightarrow \tau_{16} := \sigma_2^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_3 \sigma_4 \sigma_3^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_2 \sigma_4^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \\ L' \Rightarrow \tau_{17} := \sigma_2 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3 \sigma_5 \sigma_2^{-1} \sigma_4 \sigma_1 \sigma_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M \Rightarrow \tau_{18} := \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_4 \sigma_3^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_2 \sigma_4^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_4 \\ M' \Rightarrow \tau_{19} := \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_4^{-1} \sigma_3 \sigma_5 \sigma_2^{-1} \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_4^{-1} \end{cases}$$

Si calculamos sus polinomios de Alexander obtenemos respectivamente:

$$\begin{aligned} \tau_1 &\mapsto (-t_0 t_1 t_2 + t_3 t_4 t_5)^2 \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 - 1)^2 \\ \tau_2 &\mapsto (-1) \cdot (-t_0 t_1 t_2 + t_3 t_4 t_5) \cdot (-t_0 t_1 t_2 t_3 + t_4 t_5) \cdot (t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 - t_0) \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 - 1) \\ &\quad \begin{cases} \tau_3 \mapsto (-1) \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 - 1)^4 \\ \tau_4 \mapsto (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 - 1)^4 \end{cases} \\ &\quad \begin{cases} \tau_5 \mapsto (-1) \cdot (t_2 t_3 t_4 t_5 - t_0 t_1)^3 \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 - 1) \\ \tau_6 \mapsto (-1) \cdot (-t_0 t_1 t_2 t_3 + t_4 t_5) \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 - 1)^3 \end{cases} \\ &\quad \begin{cases} \tau_7 \mapsto (-t_0 t_1 t_2 + t_3 t_4 t_5)^2 \cdot (t_0 t_1 t_2 t_5 - t_3 t_4) \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 - 1) \\ \tau_8 \mapsto (-1) \cdot (-t_0 t_1 t_2 + t_3 t_4 t_5)^2 \cdot (t_0 t_1 t_2 t_5 - t_3 t_4) \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 - 1) \end{cases} \\ &\quad \begin{cases} \tau_9 \mapsto (-t_2 t_3 t_4 t_5 + t_0 t_1) \cdot (t_0 t_1 t_4 t_5 - t_2 t_3) \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 - 1)^2 \\ \tau_{10} \mapsto (-1) \cdot (-t_0 t_1 t_2 t_3 + t_4 t_5) \cdot (t_0 t_1 t_4 t_5 - t_2 t_3) \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 - 1)^2 \end{cases} \\ &\quad \begin{cases} \tau_{11} \mapsto (-1) \cdot (-t_0 t_1 t_2 t_3 + t_4 t_5) \cdot (t_0 t_1 t_4 t_5 - t_2 t_3) \cdot (t_2 t_3 t_4 t_5 - t_0 t_1) \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 - 1) \\ \tau_{12} \mapsto (-t_0 t_1 t_2 t_3 + t_4 t_5) \cdot (t_0 t_1 t_4 t_5 - t_2 t_3) \cdot (t_2 t_3 t_4 t_5 - t_0 t_1) \cdot (t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 - 1) \end{cases} \end{aligned}$$

De los no descomponibles no damos los polinomios de Alexander.

## A.3. Algunas Demostraciones

### A.3.1. Demostración del Lema 1.6

*Demostración.* Ya hemos visto que las dos orientaciones de una semiorientación dan lugar al mismo número de enlace y hemos construido una isotopía entre ellas. No es la única, una rotación de 180 grados también produce el mismo resultado.

En la definición ya hemos supuesto que si las dos rectas son isótomas tienen el mismo número de enlace. Si tomamos un par de rectas semiorientadas, por una isotopía las podemos llevar a las rectas de la Figura 12, por tanto, si tienen el mismo de enlace serán isótomas.  $\square$

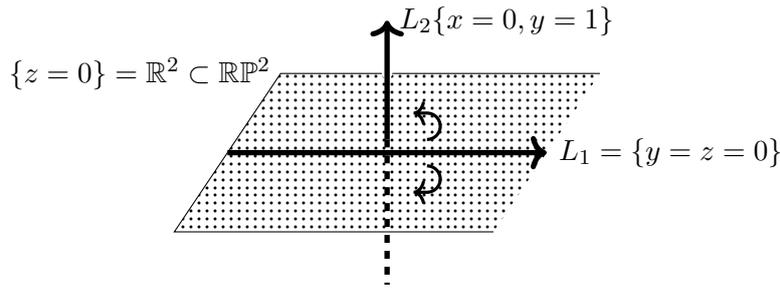


Figura 12: Par de rectas con  $\mathbb{RP}^2$  y su orientación

### A.3.2. Demostración del Teorema 1.11

*Demostración.* i) Identificamos  $\mathbb{RP}^3$  con la unión de  $\mathbb{R}^3$  y el plano en el infinito y trabajamos en  $\mathbb{R}^3$ . El hiperboloide  $H$  tiene ecuación  $\mathbb{F}(x, y, z) = 0$  con  $\deg(\mathbb{F}) = 2$  y la recta es  $\mathbb{L} = \{x = x(t), y = y(t), z = z(t)\}$  con parametrizaciones afines. Si sustituimos en la fórmula de nuestro hiperboloide, obtendremos una ecuación  $\mathbb{F}_t = \mathbb{F}(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}[t]$  y tal que  $\deg(\mathbb{F}_t) \leq 2$ . Si nuestra recta tiene tres puntos en común con el hiperboloide, eso quiere decir que  $\mathbb{F}_t$  se anulará en, al menos, esos tres puntos, por lo que  $\mathbb{F}_t$  tendrá al menos tres raíces. Pero si un polinomio de grado menor o igual que dos se anula en tres puntos, quiere decir que se anula en todos, por lo tanto, nuestra recta estará completamente contenida en el hiperboloide, así que será una generatriz.

ii) Podemos suponer que  $\pi$  es el plano  $z = 0$  y que la generatriz contenida en  $H \cap \pi$  tiene ecuación  $z = y = 0$ . de esta forma, como  $H \cap \pi$  tiene ecuación  $z = \mathbb{F}(x, y, 0) = 0$ ,  $y$  divide a  $\mathbb{F}(x, y, 0)$ , es decir  $\mathbb{F}(x, y, 0) = x(ax + by) = 0$  lo que nos indica que la recta  $z = ax + by = 0$  también está en la intersección.

iii) Tras un cambio de coordenadas, podemos suponer que  $r_1 = \{x = y = 0\}$ ,  $r_2 = \{z = t = 0\}$ ,  $r_3 = \{x + z = y + t = 0\}$ . El hiperboloide de ecuación homogénea  $xt = zy$  contiene a las tres.  $\square$

### A.3.3. Idea de la demostración del Teorema 3.5

*Idea de la demostración del Teorema 3.5.* Comenzamos con los generadores. Veamos que las imágenes por la inclusión de  $\pi_1(U_1, x_0)$  y  $\pi_1(U_2, x_0)$  generan  $\pi_1(X, x_0)$ .

Sea  $\alpha \in \Omega(X, x_0)$  (conjunto de los lazos de  $X$  basados en  $x_0$ ). Para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  se define el camino:

- Si  $\alpha(t) \in U \Rightarrow \exists U_t \subseteq [0, 1]$  tal que  $t \in U_t \Rightarrow \alpha(U_t) \subseteq U$ .
- Si  $\alpha(t) \notin U \Rightarrow \alpha(t) \in V \Rightarrow \alpha(U_t) \subseteq V$ .

De esta forma,  $\{U_t\}_{t \in [0, 1]}$  es un recubrimiento abierto de  $[0, 1]$ . Por compacidad, podemos encontrar  $0 = \tau_0 \leq \dots \leq \tau_n = 1$  familia de puntos en  $[0, 1]$  tales que  $[\tau_{j-1}, \tau_j]$  está en alguno de esos abiertos  $U_t$ . En particular  $\alpha([\tau_j, \tau_{j+1}]) \subseteq U$  ó  $V$ .

Definimos:

$$\begin{aligned} \alpha_i : [0, 1] &\longrightarrow X = U \cup V \\ t &\longmapsto \alpha_i(t) = \alpha((1-t)\tau_{i-1} + t\tau_i) \end{aligned}$$

Así  $\alpha \sim \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n$ . Definimos ahora:

$$\begin{aligned} \beta_j : [0, 1] &\longrightarrow U \cap V \\ 0 &\longmapsto x_0 \\ 1 &\longmapsto \alpha(\tau_j) \end{aligned}$$

Así:

$$\alpha \sim \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n \sim (\alpha_1 \cdot \beta_1^{-1}) \cdot (\beta_1 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{-1}) \cdot \dots \cdot (\beta_{n-2} \cdot \alpha_{n-1} \cdot \beta_{n-1}^{-1}) \cdot (\beta_{n-1} \cdot \alpha_n) = \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_n$$

con  $\gamma_i \in \Omega(U, x_0)$  ó  $\gamma_i \in \Omega(V, x_0)$ . Luego, todo camino de  $X$  basado en  $x_0$  se puede escribir como producto de lazos basados en  $x_0$ , cada uno viviendo en  $U$  ó en  $V$ .

Para las relaciones, los generadores  $S_1 \cup S_2$  de  $\pi_1(X, x_0)$  satisfacen las relaciones  $R_1 \cup R_2 \cup R_S$  por lo que cualquier relación del grupo, será consecuencia de las relaciones  $R_1 \cup R_2 \cup R_S$ . La parte más técnica es probar que bastan estas.  $\square$

## A.4. Programas de Sagemath

La función **simplifica\_Laurent** multiplica un polinomio de Laurent por potencias de variables para que no haya exponentes negativos y que ninguna variable sea un factor.

```
def simplifica_Laurent(pol):
    R=pol.parent()
    n=len(R.gens())
    E=pol.exponents()
    C=pol.coefficients()
    m=[min(_[j] for _ in E) for j in range(n)]
    return pol*prod(R.gen(j)^(-m[j]) for j in range(n))
```

La función **burau\_color** calcula la representación de Burau coloreada  $\rho : \mathbb{P}_n \rightarrow M(n-1, \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}])$ . Aunque solo está definida para trenzas puras, es más cómodo definirla para palabras coloreadas o etiquetadas con  $(1, \dots, n)$ . Empezamos con la coloración ordenada y esta se irá cambiando paso a paso según la trenza. Tomemos  $\sigma_j$ ,  $1 \leq j < n$  en la que el hilo  $j$  tiene color  $a_j$  y el hilo  $j+1$  tiene color  $b_j$  la matriz  $A_j(a_j)$  que le asociamos es se obtiene a partir de la matriz identidad con los siguientes cambios en la  $j$ -ésima fila: las posiciones  $(j-1, j, j+1)$  son  $(t_{a_j}, -t_{a_j}, 1)$  (para la primera y última fila nos olvidamos de las entradas que no aparecen). Para  $\sigma_j^{-1}$  tomamos la matriz  $A_j(b_j)^{-1}$ . Al pasar  $\sigma_j^{\pm 1}$  los colores  $a_j$  y  $b_j$  se permutan.

```
def burau_color(n,tietze):
    l=[1..n]
    R=LaurentPolynomialRing(QQ,n,'t')
    A=identity_matrix(R,n-1)
    for j in tietze:
        A1=identity_matrix(R,n-1)
        if j>0:
            a=R.gen(l[j-1]-1)
        elif j<0:
            a=R.gen(l[-j]-1)
        i=abs(j)-1
        if i>0:
            A1[i,i-1]=a
```

```

A1[i,i]=-a
if i<n-2:
    A1[i,i+1]=1
if j<0:
    A1=A1.determinant()^-1*A1.adjoint()
A=A*A1
if i+2<n:
    pr=Permutation([(i+1,i+2),(n,)])
elif i+2==n:
    pr=Permutation((n-1,n))
l=pr.action(1)
return A

```

La función `trenza_recta`, dada la trenza  $\sigma$  de una configuración de rectas, construye  $\tau = \sigma \cdot \Delta \cdot \sigma \cdot \Delta^{-1}$  que, al cerrarla, define el enlace que da la preimagen de las rectas por la aplicación  $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^3$ . A dicha trenza pura le asociamos su matriz de Burau coloreada  $A$  y calculamos  $\det(A - I)$ , y quitamos un factor  $t_1 \dots t_n - 1$ .

```

def trenza_recta(n,tietze):
    B=BraidGroup(n)
    R=LaurentPolynomialRing(QQ,n,'t')
    tr=B(tietze)
    t=tr*B.Delta()*tr/B.Delta()
    a=t.Tietze()
    A=burau_color(n,a)
    d=(A-identity_matrix(R,n-1)).det()
    d=simplifica_Laurent(d)
    p=prod(_ for _ in R.gens())-1
    B=d.factor()
    u=B.unit()
    for i,j in B:
        if i!=p:
            u=u*R(i)^j
        else:
            u=u*i^(j-1)
    return u

```

Éste programa nos calcula el **polinomio de Alexander multivariable** de una trenza.

La función `borrarhilo` nos da las trenzas resultantes de quitar cada vez un hilo distinto de la original.

```

def borrarhilo(lista,hilo):
    pos=hilo
    res=[]
    for a in lista:
        if abs(a)<pos-1:
            res.append(a)
        elif abs(a)>pos:
            a1=sign(a)*(abs(a)-1)
            res.append(a1)
        elif abs(a)==pos-1:

```

```

        pos=pos-1
    elif abs(a)==pos:
        pos=pos+1
    return res

```

La función **enlace** tiene como entrada una lista de números que codifica la trenza asociada a un enlace de rectas en  $\mathbb{RP}^3$ , y dos números  $i, j$  que codifican dos rectas. El programa busca el cruce entre estas dos rectas.

```

def enlace(lista,i,j):
    L=[i,j]
    if i==j:
        return 0
    elif i>j:
        i,j=[j,i]
    res=0
    for a in lista:
        if abs(a)==i and j==i+1:
            res=res+sign(a)
        elif abs(a)==i and j>i+1:
            i=i+1
        elif abs(a)==i-1:
            i=i-1
        elif abs(a)==j:
            j=j+1
        elif abs(a)==j-1:
            j=j-1
    return res

```

El programa se utilizará sobre todo para calcular los números de enlace de ternas.

El siguiente programa utiliza la función **enlace** para calcular el número de ternas positivas en la trenza *lis*, debemos modificar el programa para cada trenza en función de los hilos que tenga, en el caso del ejemplo se trata de una trenza de cinco hilos.

```

for i in [1]:
    enlaces2={}
    for i,j in Combinations([1..5],2):
        enlaces2[i,j]=enlace(lis,i,j)
    enlaces3={}
    for i,j,k in Combinations([1..5],3):
        enlaces3[i,j,k]=enlaces2[i,j]*enlaces2[i,k]*enlaces2[j,k]
    print enlaces3.values().count(1)

```

El siguiente ejemplo partimos de un enlace de cinco rectas, y para cada uno de los cinco subenlaces de cuatro rectas, calculamos cuántas ternas positivas tienen dichos subenlaces haciendo uso de las funciones anteriores, lo que nos da un invariante del enlace de cinco rectas.

```

for i in [1..5]:
    lis0=borrarhilo(lis,i)
    enlaces2={}
    for i,j in Combinations([1..4],2):
        enlaces2[i,j]=enlace(lis0,i,j)
    enlaces3={}

```

```

for i,j,k in Combinations([1..4],3):
    enlaces3[i,j,k]=enlaces2[i,j]*enlaces2[i,k]*enlaces2[j,k]
print enlaces3.values().count(1)

```

Un enlace orientado  $L$  en  $\mathbb{S}^3$  se representa en **Sagemath** de varias maneras, una de ellas mediante el código de Gauss orientado. Si  $L$  tiene  $n$  componentes conexas lo podemos dar  $2^n$  orientaciones (cada uno con su código de Gauss). Este programa da la lista de los códigos de Gauss orientados de las  $2^n$  orientaciones.

```

def cambio_orientacion(GC,i):
    res0=copy(GC[0])
    res1=copy(GC[1])
    nudo=res0[i-1]
    res0[i-1]=[nudo[-j] for j in [1..len(nudo)]]
    for j in [1..len(res1)]:
        control=(j in nudo or -j in nudo) and not (j in nudo and -j in nudo)
        if control:
            res1[j-1]=-res1[j-1]
    return [res0,res1]

```

Para calcular los polinomios de Jones y Homfly se utilizan las funciones `jones_polynomial` y `homfly_polynomial`, este último en la normalización que permite volver a recuperar el polinomio de Jones. Necesitamos este último paso ya que para alguno de los ejemplos el cálculo directo del polinomio de Jones es extremadamente costoso, mientras que su cálculo mediante el polinomio de Homfly es muy rápido.

