

# Órbitas de sistemas cuasi-keplerianos



**Antonio Villoro Arnau**  
Trabajo de fin de grado en Matemáticas  
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo:  
Alberto Abad Medina  
Luis Floría Gimeno

Febrero de 2018



# Summary

Central force fields play an important role in many areas of Physics and Mathematics, since they provide useful theoretical models to address many scientific and technical questions of interest.

The differential equations governing the motion of a mass particle under the effect of a conservative central force can be reduced to equations of one-degree-of-freedom systems. Consequently, they are integrable systems whose solutions can be obtained (at least in principle) by mere quadratures, although in most cases the required calculation of primitive functions cannot be achieved in terms of explicit, elementary functions.

In particular, *the Kepler problem and the harmonic oscillator* are simple, *solvable* central-force problems whose solutions can be obtained with the help of elementary (circular) functions, and used as first approximations to the solutions to more complex dynamical systems.

As a general rule, Keplerian and oscillator solutions are adopted as the starting point from which analytical perturbation methods can be applied to perturbed problems.

A class of perturbed Keplerian systems, the so-called *quasi-Keplerian systems* and *generalized quasi-Keplerian systems*, is considered in this Undergraduate Dissertation. They are perturbed Keplerian systems in which the perturbing force is given by a conservative central force obeying a simple expression in the form of a linear combination of terms inversely proportional to powers of the distance from the force centre, the exponents of those powers being natural numbers.

After appropriate transformations of variables, the equations of motion of the Kepler problem can be brought into the form of second-order linear differential equations with constant coefficients corresponding to harmonic oscillators, while perturbed Kepler systems give rise to second-order quasi-linear equations governing weakly non-linear perturbed oscillators.

**This Undergraduate Dissertation is organized into two chapters and four appendices.**

CHAPTER 1 contains a brief historical account of some of the modifications of Newton's Law of Gravity that diverse authors have proposed in order to reconcile the discrepancies between theoretical predictions concerning motion of certain celestial bodies (namely, the secular displacement of the perihelia of some Solar-System bodies, mainly the Moon and the inner planets) and results of observations. Diverse authors (even Newton himself) suggested that the inverse-square law might be amended by modifying the exponent of the distance. Other authors opted for including additional terms (proportional to other powers of the distance).

This last approach gives rise to what Deprit called *quasi-Keplerian systems*, in which an inverse-cube term is added to the the Newtonian inverse-square force, in such a way that a Keplerian ellipse subject to the disturbing effects due to that additional term should undergo a precession of its periastron. In particular, the Bulgarian physicist Georgi *Manev* proposed a post-Newtonian, non-relativistic gravitational model fitting into the pattern of the said quasi-Keplerian systems and very accurately accounting for the "anomalous" rotation of the apse line of planet Mercury.

The contents of this Chapter are mainly presented in words, avoiding (as much as possible) mathematical notations and formulae. Some contents in this Chapter are presented in mathematical formulation in other parts of the Memoir.

CHAPTER 2 deals with the treatment of the equations of motion in a conservative central–force field (formulated in plane polar coordinates) by means of a *Binet transformation* involving a change of both the dependent and the independent variable. This treatment is particularized to the case of generalized quasi–Keplerian systems, which leads to a second–order quasi–linear differential equation corresponding to an oscillator weakly perturbed by small non–linear terms, whose solution is approached by a perturbative technique (in our case, the averaging method named after *Krylov–Bogoliubov and Mitropolsky*, KBM, a brief description of which is also given). This approximate oscillator solution allows us to construct an approximate solution to the quasi–Keplerian system in plane polar coordinates, and an approximate generalized Kepler–like equation. Then, the preceding results are applied to the study of the *orbital precession of a planet* (say, Mercury) *under two different gravitational models* modifying the conventional Newtonian law of gravitational attraction (the post–Newtonian, non–relativistic law proposed by Manev, and the Einsteinian relativistic model). *Both models yield the same results (up to the first order).*

The 1–dimensional harmonic oscillator is briefly reviewed in APPENDIX 1.

The concept and basic properties of central force fields are summarized in APPENDIX 2.

APPENDIX 3 collects some general facts concerning the Kepler problem.

Finally, a definition and recurrence formulae for Chebyshev polynomials are given in APPENDIX 4.

Involved calculations in the development of the approximate solution constructed by means of the KBM method have been carried out with the help of the computer algebra system *Maple*.

# Índice general

<b>Summary</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Primeras correcciones a la Ley de Gravitación de Newton . . . . .	1
1.2. Sistemas cuasi-keplerianos . . . . .	2
1.3. Métodos de perturbaciones . . . . .	4
1.4. Sobre la precesión del periastro en sistemas cuasi-keplerianos . . . . .	5
1.5. Sobre esta Memoria . . . . .	6
<b>2. Integración de sistemas cuasi-keplerianos</b>	<b>7</b>
2.1. Transformación de Binet . . . . .	7
2.2. Reducción del problema cuasi-kepleriano a la forma de un oscilador . . . . .	8
2.3. Método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (KBM) . . . . .	10
2.4. Aplicación del método KBM a un sistema cuasi-kepleriano . . . . .	12
2.4.1. Orden 1 . . . . .	13
2.4.2. Orden 2 . . . . .	14
2.4.3. Solución hasta orden dos . . . . .	15
2.5. Trayectoria de un sistema cuasi-kepleriano en su plano . . . . .	16
2.6. Precesión del periastro en sistemas cuasi-keplerianos . . . . .	19
2.6.1. Aplicación al movimiento secular del perihelio de Mercurio . . . . .	20
<b>Conclusiones</b>	<b>23</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>25</b>
<b>A. Oscilador armónico simple</b>	<b>27</b>
<b>B. Fuerza central y movimiento plano</b>	<b>29</b>
B.1. El problema de la fuerza central . . . . .	29
B.2. Movimiento plano y coordenadas polares . . . . .	30
<b>C. Movimiento kepleriano</b>	<b>33</b>
C.1. Problema gravitatorio de dos cuerpos . . . . .	33
C.2. La órbita kepleriana en el espacio . . . . .	34
C.3. La órbita kepleriana en el plano orbital . . . . .	35
<b>D. Polinomios de Chebyshev</b>	<b>39</b>



# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se ofrece una visión panorámica del contexto, método y resultados del trabajo que se presenta en esta Memoria.

### 1.1. Primeras correcciones a la Ley de Gravitación de Newton

La predicción del movimiento orbital de los cuerpos celestes es una de las Ciencias más antiguas, y constituyó la motivación inicial de una gran parte de la obra de Newton. Así, aunque la Era Espacial ha traído consigo novedosos aspectos del análisis de órbitas, ya existía desde hace siglos un extenso *corpus* teórico directamente relacionado con la Mecánica Celeste. De hecho, la predicción del movimiento del Sol, de la Luna y de los planetas y satélites conocidos del Sistema Solar (con sus implicaciones de índole política, bélica, comercial, etc.) representa la principal contribución de la Revolución Científica de los siglos XVI, XVII y XVIII (Kline [15], especialmente los capítulos 16, 17, 19, 20, 21, 22, 24).

Precisamente el estudio de las causas que subyacen al movimiento de los objetos celestes motivó la mayor parte del desarrollo de la Mecánica. En 1665 Isaac Newton concluyó que si la gravedad era una *fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia*, esta circunstancia podría justificar tanto la caída de los cuerpos cerca de la superficie terrestre como el movimiento de la Luna en torno a la Tierra.

En la actualidad se sabe que, en el caso particular del movimiento de un cuerpo cerca de la Tierra, la elaboración precisa del estudio de órbitas debe incluir el efecto de la asimetría o no esfericidad (geométrica y dinámica) de la Tierra, la influencia gravitatoria perturbadora debida a la presencia de otros cuerpos (el Sol, la Luna, otros planetas, etc.), los efectos de otras fuerzas no gravitatorias (fricción aerodinámica debida al rozamiento atmosférico, corrientes eléctricas inducidas por el campo magnético terrestre, ...), etc., pero casi todos los fundamentos esenciales de la teoría de órbitas son extrapolaciones del trabajo de Newton, como él mismo ya había previsto.

En relación con la ley de atracción gravitatoria enunciada por Isaac Newton, y conocida como *Ley de Gravitación Universal*, ya desde un principio diversos autores (de hecho, incluso el propio Newton) manifestaron sus dudas acerca de la validez, universalidad y exactitud de dicha Ley.

Las discrepancias, imposibles de justificar entonces, entre las predicciones teóricas (basadas en cálculos que parten del modelo de fuerzas proporcionado por la Ley de Gravitación de Newton) y los movimientos de avance observados en los periastrós de las órbitas de algunos cuerpos celestes suscitaron la cuestión sobre la exactitud de un modelo de fuerza de atracción dependiente del inverso del cuadrado de la distancia entre los cuerpos, y motivaron la consideración y el desarrollo de posibles *correcciones y modelos alternativos de atracción gravitatoria*, con el propósito de reconciliar dichas diferencias y alcanzar un grado suficientemente satisfactorio de concordancia entre las predicciones teóricas y los resultados las de observaciones del movimiento de los cuerpos celestes (principalmente, la Luna, pero también algunos planetas) en el seno del Sistema Solar.

Así, por ejemplo, el propio Newton (véase Valluri *et al.* [24, p. 13]; Aoki [5, §2, §§2.1, pág. 151, y Apéndice B, §B.1, págs. 175–176]), para explicar el desplazamiento (de  $3^{\circ} 3'$  por revolución) del perigeo de la Luna, propuso una modificación de su ley de atracción, sugirió el exponente  $-2 \frac{4}{243} \approx$

$-2,01646$  en lugar del exponente  $-2$ , y atribuyó esa pequeña diferencia al efecto perturbador del Sol sobre la órbita de la Luna.

Otros autores (e incluso en mismo Newton, [20, Libro I, Sección IX, Proposición XLIV]) intentaron explicar la rotación de la línea de ápsides (es decir, el movimiento secular de los periastrós) por medio de otras modificaciones de la Ley de Gravitación Universal de Newton, utilizando en general modelos de fuerzas centrales conservativas en los que al modelo newtoniano (ley de fuerzas inversamente proporcional al cuadrado de la distancia) se superponen fuerzas de menor magnitud que dependen de la distancia bajo otras expresiones funcionales.

De este modo, para su aplicación a problemas de movimiento orbital, Newton ([20, Libro I, Sección IX, Proposición XLIV, Corolario 2; y Proposición XLV]) consideró un modelo de fuerza (central conservativa) de la forma

$$F(r) = \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^3}$$

en su investigación de la precesión del perigeo de la Luna. Véase también Kline [15, Cap. 17, §3, y Cap. 21, §1].

## 1.2. Sistemas cuasi-keplerianos

La locución *sistema cuasi-kepleriano* (*quasi-Keplerian system*) fue introducida por Deprit ([7, §4, pp. 124–128]) para referirse a la clase de sistemas keplerianos perturbados en los que actúa una fuerza perturbadora radial  $F_\varphi(\mathbf{r})$  inversamente proporcional al cubo de la distancia, y que por lo tanto deriva de un potencial perturbador  $V_\varphi(r)$  inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$\mathbf{F}_\varphi(\mathbf{r}) = \frac{B}{r^3} \hat{\mathbf{r}}, \quad V_\varphi(r) = \frac{\mathcal{D}}{r^2}, \quad \mathbf{F}_\varphi(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}} V_\varphi(r), \quad (1.1)$$

donde  $B$  y  $\mathcal{D}$  son constantes que, en algunos casos, pueden estar relacionadas con (ser iguales o proporcionales a) un pequeño parámetro que da cuenta del orden de magnitud de la perturbación considerada. En tales casos el potencial  $V_\varphi(r)$  podrá interpretarse como un desarrollo, truncado en el término de primer orden, en potencias de dicho pequeño parámetro. En cualquier caso, independientemente de la magnitud de las constantes  $B$  y  $\mathcal{D}$ , y tras las manipulaciones adecuadas, el problema del movimiento de una partícula en el seno de un campo de fuerzas de ese tipo se reduce al estudio de un sistema dinámico de un solo grado de libertad (por lo tanto, integrable; de hecho, resoluble por mera cuadratura).

Como continuación de esas ideas, el mismo Deprit ([7, §7, Ecs. (57) y (58), p. 138, y Ec. (59), p. 139]) propuso una familia de sistemas keplerianos perturbados, de estructura cuasi-kepleriana, en los que el modelo de fuerzas obedece a la expresión (1.1) anterior y proporcionan aproximaciones integrables, y fácilmente resolubles, para el *Problema Fundamental* de la Teoría de Satélites Artificiales de la Tierra (Deprit [7, §5]; Abad *et al.* [2, §2]; Abad [1, Cap. 17, §17.2]; Floría [10, Cap. 2]). Dichos sistemas se denominan *intermediarios radiales de Deprit* para el *Problema Fundamental*, o *Problema Principal* (“*Main Problem*”) de la Teoría del Satélite Artificial, y absorben (hasta el orden de cada intermediario) los efectos seculares debidos al segundo armónico zonal del desarrollo del potencial de la atracción gravitatoria creada en un punto exterior por un sólido rígido de figura y distribución de masa arbitrarias (Abad [1, Cap. 14]; Meirovitch [19, §11.7, y §12.2], Deprit [7, §5, Ec. (44), p. 129]), en particular, por la Tierra, en serie de armónicos esféricos (formalizados por medio de funciones de Legendre).

Además, resolvió ([7, §9]) un caso de sistema cuasi-kepleriano ([7, §7, Ec. (57), p. 138]) que incorpora la contribución de los efectos seculares de primer orden recogidos en el modelo del *Problema Fundamental* de la Teoría Satélites Artificiales de la Tierra, obteniendo una solución exacta y en forma cerrada (por medio de funciones circulares) para el sistema en cuestión. Para ello redujo la ecuación diferencial de la órbita a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal, no homogénea y de coeficientes constantes, que puede interpretarse como la ecuación de un oscilador armónico simple unidimensional de frecuencia unidad sometido además a una fuerza constante igual a la unidad.



Los sistemas cuasi-keplerianos de tipo Deprit y algunas de sus generalizaciones admiten *linealización exacta* (es decir, reducción de las ecuaciones del movimiento a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, de segundo orden con coeficientes constantes, correspondientes a osciladores armónicos) por medio de transformaciones de variables adecuadas. En tales casos, la perturbación recogida en la parte no newtoniana de estos sistemas (y, en particular, en la parte no newtoniana de, por ejemplo, el modelo de Manev, del que hablaremos posteriormente) queda incorporada en la frecuencia de esos osciladores lineales.

Nótese que el movimiento de una partícula gobernado por una fuerza de la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{F}_p(\mathbf{r}), \quad (1.2)$$

con  $\mathbf{F}_p(\mathbf{r})$  como en la fórmula (1.1) anterior, y  $\mu$  una constante, no deja de ser un movimiento en el seno de un campo de fuerzas central conservativo.

El estudio de campos centrales regidos por leyes de fuerza de la forma

$$F(r) = \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^3} \quad (1.3)$$

tiene una larga tradición en la Mecánica Clásica y en la Mecánica Celeste, y puede remontarse al propio Newton ([20, Libro I, Sección IX, Proposición XLIV]; Kline [15, Cap. 17, §3]; Aoki [5, Apéndice B, §B.1, págs. 174–175]), si bien el tratamiento de Newton, presentado en un estilo expositivo que imita el estilo lógico-deductivo y geométrico de los “*Elementos*” de Euclides, difiere considerablemente del estilo expositivo basado en el empleo de los recursos que brinda en Cálculo Infinitesimal (Diferencial e Integral), tal y como se encuentra en autores posteriores (Clairaut, D’Alembert, Euler, Gauss, Laplace, etc.) y es habitual en la actualidad.

El propósito de Newton en esa Proposición XLIV es estudiar el efecto de una fuerza perturbadora inversamente proporcional a la tercera potencia de la distancia, superpuesta a una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (como es el caso de la atracción gravitatoria descrita por la Ley de Gravitación Universal de Newton).

El argumento (geométrico o cinemático) de Newton en su Proposición XLIV del Libro I de los “*Principia*” aparece “traducido” a estilo y lenguaje “analítico” moderno en Aoki ([5, Apéndice B, §§B.1, págs. 174–175]), cuya Ec. (58), pág. 175, encaja en el esquema del tratamiento de los sistemas cuasi-keplerianos considerados por Deprit ([7, §4]). Otro precedente notable en el uso de este modelo de fuerza se encuentra en Clairaut (Kline [15, Cap. 21, §1]; Tisserand, [23, Cap. IV, §24, y §27]).

Podrían citarse muchas otras referencias bibliográficas, tanto desde un punto de vista clásico como desde posiciones más moderna; por ejemplo, potenciales de la forma

$$-\frac{\mu}{r} + \frac{B}{r^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2,$$

aparecen en Goldstein [13, Cap. 11, §11.3], ejemplos B (en el que, para  $n = 3$ , págs. 511–512, se considera la conocida corrección relativista a la Ley de Gravitación de Newton que permite explicar el movimiento de precesión del perihelio de Mercurio, problema que también se trata en esta Memoria) y C (este último, inspirado por el Problema Fundamental de la Teoría de Satélites Artificiales de la Tierra).

Los sistemas cuasi-keplerianos y cuasi-keplerianos generalizados considerados por Deprit [7, §4, §7, §9], o por Floría ([9], [10], [11]), son sistemas keplerianos perturbados que comparten una gran proximidad *formal* con el movimiento kepleriano, y admiten soluciones de “apariencia kepleriana”, soluciones analíticas exactas en forma cerrada por medio de funciones elementales (en concreto, funciones circulares). Dichas soluciones (bajo la forma de “órbitas keplerianas ficticias”) son susceptibles de una sencilla interpretación geométrica y dinámica “en lenguaje kepleriano”, gracias a ciertas modificaciones adecuadas de las relaciones que caracterizan a los hipotéticos elementos orbitales de un movimiento kepleriano “auxiliar” o “ficticio”. Sin embargo los términos de perturbación distorsionan la descripción convencional del movimiento kepleriano, y su influencia sobre la línea de apsides será responsable de la precesión de la órbita.

Otros sistemas cuasi-keplerianos generalizados, en cuya ley de fuerzas puedan intervenir uno o varios términos no newtonianos del tipo  $N/r^n$ , con  $N$  constante y el exponente un número natural  $n \geq 4$ , no pueden en general integrarse por medio de funciones elementales, siendo necesario recurrir a integrales elípticas o hiperelípticas para su resolución. Pero cuando la parte no newtoniana sea (muy) pequeña en comparación con la magnitud del término newtoniano (o kepleriano) dominante, es posible calcular una *solución de manera aproximada mediante métodos de perturbaciones*.

### 1.3. Métodos de perturbaciones

La obtención de soluciones en forma cerrada para las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de los sistemas dinámicos no siempre es posible: de hecho, son muy pocos los problemas para los que dicha resolución puede llevarse a cabo. Pero, precisamente por ello, esos problemas *resolubles* adquieren especial importancia, ya que en muchos casos pueden considerarse como *modelos aproximados, ideales y simplificados* para abordar el estudio de problemas más complicados. (Abad *et al.* [2]; Floría [10, cap.2, §2.3, pág. 53–55]; Meirovitch [19, cap.8, pág. 293–296])

En muchas situaciones las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de un sistema físico más complejo pueden *separarse* en una parte que caracteriza al problema “simplificado” (resoluble, y con solución conocida”), y del que se tiene de antemano un conocimiento suficientemente exacto y completo, y otra que aporta indicios sobre el grado en el que el sistema de interés *difiere (o se desvía) del modelo idealizado*. Esta última parte, en general de magnitud mucho menor que la anterior, se conoce como *perturbación*.

En ocasiones, la parte que representa a la perturbación puede expresarse en forma de una serie de potencias de un pequeño parámetro que da cuenta del orden de magnitud de los diversos términos que intervienen en la perturbación; el papel primordial de ese parámetro consiste en separar el “problema-modelo” (resoluble) y la “perturbación”, y aportar información acerca de la importancia cuantitativa de la misma.

Nótese que incluso pequeñas perturbaciones de un sistema integrable pueden dar lugar a la no integrabilidad del sistema perturbado resultante. Se trata, entonces, de abordar la *resolución formal de problemas perturbados* construyendo en el entorno de una solución conocida (del sistema no perturbado) soluciones en forma de series desarrolladas según potencias del pequeño parámetro. Dicha construcción suele efectuarse por medio de un proceso de *aproximaciones sucesivas*, y en general quedan abiertas las cuestiones relativas a la convergencia de tales series, en la esperanza de que para intervalos de variación de la variable independiente prudentemente elegidos la solución formal obtenida describa con suficiente precisión el estado y la evolución reales del sistema.

De entre los modelos resolubles, debido a su utilidad y aplicabilidad en muy diversos problemas, merecen especial atención el *oscilador armónico* y el *problema de Kepler*, que son tratados, respectivamente, en los Apéndices (A), (C) de esta Memoria.

Cabe además destacar que, por medio de *cambios de variables adecuados*, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema de Kepler pueden convertirse en ecuaciones diferenciales de osciladores armónicos (forzados o no forzados), mientras que los sistemas keplerianos perturbados se llevan a la forma de osciladores perturbados (osciladores armónicos débilmente no lineales, sistemas oscilatorios cuasi-lineales, o sistemas oscilatorios débilmente no lineales), a los cuales pueden aplicarse los métodos de perturbaciones especialmente diseñados para la obtención de soluciones analíticas (aproximadas) de tal tipo de sistemas, por ejemplo, entre otros, el método de **Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (KBM)**.

Krylov y Bogoljubov (Abad *et al.* [2]; Meirovitch [19, cap. 8, §8.4, pág. 302–309]; [22, Parte I, Cap. 2, pág. 40–59]) elaboraron un método para construir una solución (formal)  $u = u(\tau)$  de una ecuación diferencial autónoma de segundo orden débilmente no lineal del tipo  $u'' + \omega^2 u = \varepsilon F(u, u'; \varepsilon)$  en forma de serie de potencias de  $\varepsilon$ , donde  $\varepsilon$  es un pequeño parámetro. Con posterioridad Bogoliubov y Mitropolsky mejoraron el método y justificaron algunos detalles de su aplicación.

Como estrategia de carácter general, el estudio de muchos fenómenos no lineales puede en ocasiones abordarse a partir de alguna aproximación por medio de problemas lineales más sencillos, resolubles y

con soluciones fácilmente manejables.

En particular, en muchos problemas prácticos de la Mecánica Celeste las órbitas del problema gravitatorio de dos cuerpos constituyen únicamente una primera y rudimentaria aproximación al movimiento real de los objetos celestes (naturales o artificiales). En tales casos, las secciones cónicas que representan las soluciones del problema de Kepler se suelen usar como punto de partida para un proceso de aproximaciones sucesivas que permita obtener soluciones aproximadas más realistas para los movimientos en cuestión, aunque existen también variantes de órbitas más generales que la solución kepleriana convencional que ya incorporan una parte de los efectos de la perturbación.

En la práctica, este tipo de métodos requiere una gran cantidad de cálculo simbólico algebraico, por lo que es preciso el uso de herramientas de software tipo CAS (Computer Algebraic System). Concretamente en esta Memoria se ha hecho uso del software Maple.

## 1.4. Sobre la precesión del periastro en sistemas cuasi-keplerianos

Como se ha dicho anteriormente, el desplazamiento del perigeo de la Luna motivó que el propio Newton propusiese alternativas o modificaciones a su Ley de Gravitación Universal. Algunas consideraciones sobre los primeros intentos para tratar rigurosamente el problema de la precesión “anómala” de los ápsides pueden encontrarse en el artículo de Valluri [24]. El tratamiento de Newton del movimiento apsidal de la órbita de la Luna y el análisis de Clairaut de ese mismo problema se examinan en Aoki [5]. Otra referencia clásica en relación con este problema es Tisserand [23, Cap. IV, §24 y §27], donde –para explicar la precesión del perihelio de la órbita de un planeta– se utiliza una ley de fuerzas atractiva dada por la suma de un término con el inverso del cuadrado de la distancia y otro término con el inverso del cubo.

En un sistema cuasi-kepleriano, cada vez que las anomalías generalizadas  $E$  (excéntrica) y  $f$  (verdadera) barren un intervalo de longitud  $2\pi$ , no se obtienen valores del argumento del periastro  $\omega$  congruentes módulo  $2\pi$ . Por ejemplo, tras una revolución, cuando  $f$  ha recorrido un intervalo de longitud  $2\pi$ , los valores inicial y final de los argumentos  $\omega$  correspondientes a dos configuraciones sucesivas del pericentro difieren en un valor  $\Delta\omega$ , que mide la *precesión del periastro* (o de la línea de ápsides) *en una revolución*, y por consiguiente la variación de la orientación de la órbita en el plano orbital en un periodo.

Por lo tanto la solución del problema del movimiento gobernado por un sistema cuasi-kepleriano puede interpretarse como una *órbita en forma de roseta* generada por una elipse en revolución cuyos elementos  $(a, e, i, \Omega)$  se mantienen constantes, mientras que el pericentro (comparado con el de la elipse kepleriana pura) se desplaza experimentando una variación secular. La *forma*, el *tamaño* y la *orientación del plano de la órbita* en el espacio *se conservan*, y ésta se limita a rotar rígidamente en su plano con unos de sus focos (coincidente con el centro de fuerzas) como punto fijo, de manera que los sucesivos pericentros forman un contorno poligonal con los vértices en una circunferencia de radio  $a(1 - e)$ , mientras que los sucesivos apocentros forman un contorno poligonal inscrito en una circunferencia concéntrica con la anterior y de radio  $a(1 + e)$ , siendo además el centro de fuerzas el centro de ambas circunferencias ([7, §4, p. 125; §9, p. 149]).

En 1859, Le Verrier (véase Valluri [24, §1, págs. 13–14]) descubrió que, en relación con la precesión anómala del perihelio de Mercurio, la Ley de Gravitación Universal de Newton por sí misma no podía justificar un exceso de unos 38 segundos de arco por siglo en el valor observado, y en 1882 Newcomb elevó hasta 43 segundos de arco por siglo dicha discrepancia entre las predicciones teóricas (fruto de cálculos efectuados a partir de la Ley de Gravitación de Newton) y los resultados de las observaciones.

El avance total del perihelio de Mercurio es de unos 575 segundos de arco por siglo, de los que aproximadamente 532 son debidos a la influencia perturbadora de los otros planetas del Sistema Solar; dichas perturbaciones planetarias pueden calcularse de acuerdo con la teoría newtoniana basada en la Ley de Gravitación Universal. De modo que, tras los trabajos de Newcomb, quedaba, pues, sin explicar un residuo de unos 43 segundos de arco por siglo.

Aunque se realizaron numerosos intentos de explicación de esta variación del perihelio de Mercurio,

todas basadas en diversas “modificaciones” y “añadidos” a la ley de atracción gravitacional, no fue hasta 1915 que Einstein [8] demostró que los 43 segundos de arco por siglo de la precesión “anómala” podían deducirse a partir de su Teoría de la Relatividad General. En sus fórmulas Ec. (13), pág. 838, y Ec. (14), pág. 839, da las expresiones del movimiento del perihelio en una revolución, y a continuación afirma que “El cálculo proporciona para el planeta Mercurio un avance del perihelio de 43” en cien años, mientras que los astrónomos especifican  $45'' \pm 5''$  como la diferencia no explicada entre las observaciones y la Teoría Newtoniana. Esto significa una concordancia total”.

A pesar de lo anterior, la complejidad del uso de la Teoría de la Relatividad en la resolución del problema y el pequeño valor del efecto relativista en las órbitas de los planetas, que es mucho menor en la de otros cuerpos como asteroides, cometas y satélites tanto naturales como artificiales, han llevado a reformular este efecto en términos de la Mecánica Newtoniana, de manera que dicha formulación explique de manera adecuada la variación del perihelio de Mercurio.

Los efectos de un sistema cuasi-kepleriano, descritos anteriormente, sobre la órbita parecen encajar perfectamente con el comportamiento de la órbita de Mercurio por lo que los modelos que sustituyan a la aplicación la Teoría de la Relatividad están basado en este tipo de sistemas.

En el marco de la *Mecánica Analítica Clásica* el modelo de Manev ([16] [17] [18]) constituye una *modificación no relativista* de la Ley de Gravitación de Newton que proporciona una buena y precisa explicación y justificación para el movimiento de *precesión del periastro* (es decir, el movimiento secular del pericentro, o de la línea de ápsides) de algunos cuerpos celestes, al menos en la escala del Sistema Solar (por ejemplo, el avance “anómalo” del perihelio de los planetas interiores, o el movimiento del perigeo de la Luna). Este modelo una ley de fuerzas post-newtoniana no relativista que contiene a la atracción newtoniana perturbada por un término inversamente proporcional al cubo de la distancia. Este modelo puede contemplarse como un caso de los sistemas cuasi-keplerianos considerados por Deprit ([7, §4, pp. 124–128]).

El modelo relativista puede también ser formulado (véase [21]) como un modelo de Mecánica Clásica Newtoniana a través de expresiones que postulan una fuerza del tipo cuasi-kepleriano añadiendo al término clásico kepleriano una fuerza proporcional al inverso de la distancia elevado a la cuarta potencia.

## 1.5. Sobre esta Memoria

En este trabajo se realiza un estudio de sistemas keplerianos perturbados de tipo cuasi-kepleriano, considerados como problemas de fuerza central, se lleva a cabo su reducción a la forma de un oscilador débilmente no lineal por medio de una transformación de Binet y se aborda su resolución aproximada por medio del método de promedios de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky. Finalmente se ilustra este estudio aplicándolo al problema de la precesión del perihelio de Mercurio, utilizando dos modelos de fuerza que modifican la Ley de Gravitación Universal de Newton (a saber, el modelo gravitatorio postnewtoniano no relativista de Manev y la corrección relativista de Einstein). Se ha comprobado que hasta primer orden ambos modelos proporcionan los mismos resultados. Gran parte de los cálculos necesarios se ha realizado usando programas de manipulación simbólica; en concreto, Maple.

## Capítulo 2

# Integración de sistemas cuasi-keplerianos

En este capítulo se aplica una transformación de Binet a la componente radial de las ecuaciones diferenciales del movimiento de una partícula bajo la influencia de una fuerza central conservativa.

A continuación se particulariza al caso de un sistema de tipo cuasi-kepleriano generalizado, obteniéndose una ecuación diferencial cuasi-lineal de segundo orden que puede interpretarse como la ecuación de un oscilador perturbado débilmente no lineal, cuya resolución analítica aproximada (hasta orden dos en potencias de un pequeño parámetro) se aborda por medio de una técnica de perturbaciones, el método de promedios de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky, del cual se ofrece también una descripción.

El proceso anterior permite construir una aproximación, hasta segundo orden, de la solución del sistema cuasi-kepleriano considerado y de la correspondiente ecuación de Kepler generalizada (una ecuación trascendente que da una relación entre el tiempo y la posición de la partícula en cada instante).

Por medio del tratamiento anterior y de los resultados obtenidos se deduce la expresión que describe el desplazamiento secular del periastro de un planeta a partir de dos modelos de fuerza distintos: el modelo gravitatorio postnewtoniano de Manev y el modelo relativista de Einstein. Se concluye que en ambos casos, y hasta primer orden en el pequeño parámetro, ambos modelos conducen a la misma expresión.

### 2.1. Transformación de Binet

El movimiento plano de una partícula en un campo de fuerzas centrales viene dado por unas ecuaciones, (B.7), que en general no son lineales ni regulares, con una singularidad para  $r = 0$ . En lo que sigue presentaremos una transformación llamada **transformación de Binet** (Goldstein [13, Cap. 3, §3.5, pág. 85–86], Meirovitch [19, Cap. 1, §1.9, pág. 31–32]; Fowles [12, Cap. 6 §6.7]) que permite convertir estas ecuaciones en otras, lineales y regulares, que, para determinadas funciones  $f(r)$ , representan un oscilador perturbado.

Dado que  $\dot{\theta} = d\theta/dt = G/r^2$ , podemos efectuar una transformación diferencial de la variable independiente,  $t \rightarrow \theta$ , de la siguiente manera

$$dt = \frac{r^2}{G} d\theta.$$

Este tipo de transformación diferencial se denomina **transformación de tipo Sundman**.

Considerando además la transformación de variable dependiente  $r \rightarrow u$  (cfr. Goldstein 1980, [13, §3.5, p. 86 y §3.7, p. 94]) dada por

$$u = \frac{1}{r} + K,$$

donde  $K$  es una constante absoluta o una función de constantes del movimiento, podremos transformar la ecuación radial de (B.7) en otra de modo que para algunas funciones  $f(r)$  la ecuación transformada sea lineal y regular. Realizamos entonces el cambio conjunto de la variable dependiente  $r \rightarrow u$  y de

la variable independiente  $t \rightarrow \theta$ , combinación de transformaciones conocida como **transformación de Binet**, dada por

$$\begin{cases} u &= \frac{1}{r} + K, \\ dt &= \frac{r^2}{G} d\theta. \end{cases} \quad (2.1)$$

Denotando

$$u' = \frac{du}{d\theta}, \quad u'' = \frac{d^2u}{d\theta^2},$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{G}{r^2} = G(u - K)^2,$$

calculamos  $\dot{r}$  y  $\ddot{r}$  en función de la variable  $u$  y de su derivada respecto de  $\theta$ , obteniendo para  $\dot{r}$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(1/(u - K))}{d\theta} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = - \left( \frac{u'}{(u - K)^2} \right) (G(u - K)^2) = -G u',$$

y para  $\ddot{r}$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d(dr/dt)}{dt} = \frac{d(dr/dt)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \\ &= \frac{d(-G u')}{d\theta} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = (-G u'') (G(u - K)^2) = -G^2 u'' (u - K)^2. \end{aligned}$$

Así, la ecuación (B.7) tras la transformación de Binet se convierte en

$$\begin{aligned} -G^2 u'' (u - K)^2 - G^2 (u - K)^3 &= f \left( \frac{1}{u - K} \right), \\ -G^2 (u - K)^2 (u'' + (u - K)) &= f \left( \frac{1}{u - K} \right), \end{aligned}$$

que finalmente se expresará como

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + (u - K) = - \frac{1}{G^2 (u - K)^2} f \left( \frac{1}{u - K} \right). \quad (2.2)$$

Para ciertas fuerzas, como el caso de los sistemas cuasi-keplerianos de tipo Deprit, la ecuación se transformará en una ecuación regular. Esta última ecuación se denomina en muchas ocasiones **ecuación de Binet o ecuación de la órbita**.

## 2.2. Reducción del problema cuasi-kepleriano a la forma de un oscilador

En lo que sigue supondremos el problema de una fuerza central conservativa con una ley de fuerzas expresada como una combinación lineal de potencias del inverso de la distancia en la forma

$$f(r) = \sum_{n \geq 2} \frac{K_n}{r^n}, \quad (2.3)$$

donde las  $K_n$ ,  $n \geq 2$ , son constantes.

Como puede verse en el Anexo C la expresión la fuerza central da lugar al problema de Kepler, ecuación (C.4), es del tipo anterior haciendo  $K_2 = -\mu$ ,  $K_n = 0$ ,  $n \neq 2$ , esto es,  $f(r) = -\mu/r^2$ .

El problema cuasi-kepleriano consiste en tomar la fuerza del tipo kepleriano y superponerle una pequeña perturbación expresada como suma de potencias del inverso de la distancia de manera que, en tal caso, podremos expresar la ley de fuerzas como

$$f(r) = -\frac{\mu}{r^2} - \epsilon \left( \sum_{n \geq 2} \frac{k_n}{r^n} \right), \quad (2.4)$$

siendo  $\epsilon$  un pequeño parámetro que da cuenta del orden de magnitud de los términos a los que acompaña, y donde las  $k_i$ ,  $i = 2, 3, 4, \dots$ , son constantes. Observemos que esta expresión encaja en (2.3) si hacemos  $K_2 = -\mu - \epsilon k_2$ ,  $K_n = -\epsilon k_n$ ,  $n \neq 2$ .

Llevando esta fuerza a la ecuación radial de (B.7) obtenemos para  $r(t)$  la ecuación diferencial

$$\ddot{r} - \frac{G^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2} - \epsilon \left( \sum_{n \geq 2} \frac{k_n}{r^n} \right). \quad (2.5)$$

Efectuando la transformación de Binet (2.1), después de tomar  $K = -mu/G^2$ , esto es

$$\begin{cases} u &= \frac{1}{r} - \frac{\mu}{G^2}, \\ dt &= \frac{r^2}{G} d\theta, \end{cases} \quad (2.6)$$

y teniendo en cuenta (2.2) y (2.5), queda la siguiente ecuación diferencial para la función  $u = u(\theta)$

$$\begin{aligned} u'' + \left(u + \frac{\mu}{G^2}\right) &= -\frac{1}{G^2 \left(u + \frac{\mu}{G^2}\right)^2} \left( -\mu \left(u + \frac{\mu}{G^2}\right)^2 - \epsilon \left( \sum_{n \geq 2} k_n \left(u + \frac{\mu}{G^2}\right)^n \right) \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow u'' + \left(u + \frac{\mu}{G^2}\right) &= -\frac{1}{G^2} \left( -\mu - \epsilon \left( \sum_{n \geq 2} k_n \left(u + \frac{\mu}{G^2}\right)^{n-2} \right) \right), \end{aligned}$$

y finalmente

$$u'' + u = \epsilon \left( \frac{1}{G^2} \left( \sum_{n \geq 2} k_n \left(u + \frac{\mu}{G^2}\right)^{n-2} \right) \right), \quad (2.7)$$

donde el segundo miembro, desarrollado, corresponde a un sumatorio en potencias de  $u$ .

Si tenemos en cuenta el término en  $u$  que aparece tanto en el primer miembro como en el segundo de la ecuación (2.7), podremos poner finalmente esta expresión como

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \omega^2 u = \epsilon (\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 u + \mathcal{M}_2 u^2 + \dots), \quad (2.8)$$

donde  $\omega$  y  $\mathcal{M}_n$ ,  $n \geq 0$ , son constantes.

Las constantes  $\omega$  y  $\mathcal{M}_1$  pueden tomarse de dos formas distintas. Por un lado podemos tomar

$$\omega = 1, \quad \mathcal{M}_1 = \frac{1}{G^2} \left( k_3 + 2k_4 \frac{\mu}{G^2} \right), \quad (2.9)$$

mientras que por otro tenemos

$$\omega = \sqrt{1 - \epsilon \left[ \frac{1}{G^2} \left( k_3 + 2k_4 \frac{\mu}{G^2} \right) \right]}, \quad \mathcal{M}_1 = 0, \quad (2.10)$$

Para cualquiera de las elecciones anteriores se tendrá

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &= \frac{1}{G^2} \left( k_2 + k_3 \frac{\mu}{G^2} + k_4 \left( \frac{\mu}{G^2} \right)^2 \right) \\ \mathcal{M}_2 &= \frac{k_4}{G^2}. \\ \mathcal{M}_n &= \dots, \quad n > 2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para el problema kepleriano, en el que  $\epsilon = 0$ , la ecuación (2.8) representa un oscilador armónico simple (ver Anexos (A) y (C)) de frecuencia unidad. Para el problema cuasi-kepleriano, con  $0 < \epsilon \ll 1$ , la ecuación (2.8) representa un **oscilador perturbado**, en el que la perturbación es “pequeña” y viene expresada por medio de una combinación lineal de potencias de  $u$ .

### 2.3. Método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (KBM)

El método de **Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky**, en adelante, **KBM** (Abad *et al.* [2, §4, págs. 283–286]; Meirovitch [19, Cap.8, §8.4, pág. 302–309]; Smith [22, Parte I, Cap. 2, pág. 40–59]) permite obtener soluciones asintóticas aproximadas para ecuaciones cuasi-lineales de segundo orden o, lo que es igual, para un oscilador perturbado, de la forma

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + \omega^2 u = F(u, v; \epsilon), \quad (2.12)$$

donde

$$v = \frac{du}{d\tau},$$

y  $F$  puede expresarse como una potencias de  $\epsilon \ll 1$  de la siguiente manera

$$F(u, v; \epsilon) = \epsilon f(u, v; \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} F_{n,0}(u, v), \quad F_{0,0}(u, v) = 0. \quad (2.13)$$

Cuando  $\epsilon = 0$ , estamos ante un oscilador armónico simple unidimensional, tratado en el Anexo (A), cuya solución viene dada por

$$u = \delta \cos \varphi, \quad \varphi = \omega \tau + \varphi_0,$$

donde la **amplitud**  $\delta$  es constante y el **ángulo de fase**  $\varphi$  es uniformemente rotante.

Cuando  $\epsilon \neq 0$ , el segundo miembro de la ecuación (2.12) se considera como una perturbación que causa pequeñas variaciones tanto en la amplitud como en el ángulo de fase.

El método KBM propone una solución a la ecuación (2.12) de la forma

$$u(\delta, \varphi) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} u_n(\delta, \varphi), \quad u_0(\delta, \varphi) = \delta \cos \varphi, \quad (2.14)$$

donde las funciones  $u_n(\delta, \varphi)$  son funciones  $2\pi$ -periódicas en  $\varphi$  y la variación de  $\delta$  y de  $\varphi$  con respecto a  $\tau$  viene dada por las expresiones

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tau} &= \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} A_n(\delta), \quad A_0 = 0, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} B_n(\varphi), \quad B_0 = \omega. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En lo que sigue tendremos en cuenta la fórmula de Cauchy generalizada para el producto

$$\prod_{n=1}^k \left( \sum_{i \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} a_i^{(n)} \right) = \sum_{i \geq 0} \frac{\epsilon^i}{i!} \left( \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_k = i} \frac{i!}{j_1! j_2! \dots j_k!} a_{j_1}^{(1)} a_{j_2}^{(2)} \dots a_{j_k}^{(k)} \right). \quad (2.16)$$

Derivando (2.14) con respecto a  $\tau$ , se tendrá

$$v = \frac{du}{d\tau} = \left( \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} \frac{\partial u_n}{\partial \delta} \right) \frac{d\delta}{d\tau} + \left( \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} \right) \frac{d\varphi}{d\tau},$$



donde, considerando las expresiones (2.15) y aplicando (2.16) obtendremos finalmente

$$v = \sum_{n \geq 0} v_n(\delta, \varphi), \quad v_n(\delta, \varphi) = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} \left( A_i \frac{\partial u_j}{\partial \delta} + B_i \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \right), \quad (2.17)$$

siendo, en particular,  $v_0 = -\omega \delta \sin \varphi$ .

Derivando  $v$  con respecto a  $\tau$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\tau^2} + \omega^2 u = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} \left[ \omega^2 u_n + \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} \left( A_i \frac{dA_j}{d\delta} \frac{\partial u_k}{\partial \delta} + \right. \right. \\ \left. \left. + A_i \frac{dB_j}{d\delta} \frac{\partial u_k}{\partial \varphi} + A_i A_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \delta^2} + B_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \varphi^2} + 2A_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \delta \partial \varphi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Considerando los valores de  $u_0, A_0, B_0$  y examinando en (2.18) todos los términos con  $i, j$  o  $k$  igual a  $n$ , encontramos los siguientes términos distintos de cero:

$$\begin{aligned} i = n, j = 0, k = 0 &\longrightarrow 2A_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \delta \partial \varphi} = 2A_n B_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \delta \partial \varphi} = -2\omega A_n \sin \varphi, \\ i = n, j = 0, k = 0 &\longrightarrow B_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \varphi^2} = B_n B_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} = -\omega B_n \delta \cos \varphi, \\ i = n, j = 0, k = 0 &\longrightarrow B_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \varphi^2} = B_0 B_n \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} = -\omega B_n \delta \cos \varphi, \\ i = n, j = 0, k = 0 &\longrightarrow B_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \varphi^2} = B_0 B_0 \frac{\partial^2 u_n}{\partial \varphi^2} = -\omega^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Esto nos permite escribir

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + \omega^2 u = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} \left( \omega^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial \varphi^2} + \omega^2 u_n - 2\omega A_n \sin \varphi - 2\omega B_n \delta \cos \varphi + \Omega_n \right), \quad (2.19)$$

siendo

$$\Omega_n = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \neq n}} \frac{n!}{i!j!k!} \left( A_i \frac{dA_j}{d\delta} \frac{\partial u_k}{\partial \delta} + A_i \frac{dB_j}{d\delta} \frac{\partial u_k}{\partial \varphi} + A_i A_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \delta^2} + B_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \varphi^2} + 2A_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \delta \partial \varphi} \right). \quad (2.20)$$

La expresión (2.19) representa el primer miembro de la ecuación (2.12) en función de  $\delta, \varphi$ . El segundo miembro de (2.12) se puede obtener desarrollando la función  $F(u, v; \epsilon)$  en serie de potencias de  $\epsilon$  en la forma

$$F(u, v; \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} F_{n,0} \left( \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} u_n, \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} v_n \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} F_{0,n}, \quad (2.21)$$

donde  $F_{0,n} = F_{0,n}(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ , esto es, depende de todos los términos de los desarrollos (2.14) de  $u$  y (2.17) de  $v$  hasta el orden  $n-1$ .

Igualando potencias de  $\epsilon$  en los segundos miembros de las ecuaciones (2.19) y (2.21), para cada  $n \geq 1$ , se tendrá

$$\omega^2 \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial \varphi^2} + u_n \right) = 2\omega A_n \sin \varphi + 2\omega B_n \delta \cos \varphi + U_n, \quad U_n = F_{0,n} - \Omega_n, \quad (2.22)$$

donde  $U_n$  sólo depende de  $A_p, B_p, u_p, p \leq n-1$ .

Supongamos que tenemos una función  $2\pi$ -periódica  $g(\varphi)$ . Admitirá entonces un desarrollo en serie de Fourier de la siguiente manera

$$g(\varphi) = c_0(g) + \sum_{j \geq 1} [c_j(g) \cos(j\varphi) + s_j(g) \sin(j\varphi)].$$

Al sustituir en (2.22) las expresiones de  $u_n$  y  $U_n$  por sus desarrollos en serie de Fourier e igualar término a término se obtiene, por un lado

$$A_n = -\frac{s_1(U_n)}{2\omega}, \quad B_n = -\frac{c_1(U_n)}{2\omega\delta}, \quad (2.23)$$

quedando el resto de coeficientes del desarrollo de  $u_n$  como

$$c_0(u_n) = \frac{c_0(U_n)}{\omega^2}, \quad c_j(u_n) = \frac{c_j(U_n)}{\omega^2(1-j^2)}, \quad s_j(u_n) = \frac{s_j(U_n)}{\omega^2(1-j^2)}, \quad j \geq 2. \quad (2.24)$$

Se puede observar que los coeficientes  $c_1(u_n)$  y  $s_1(u_n)$  quedan indeterminados, lo cual nos permite elegir  $c_1(u_n) = 0 = s_1(u_n)$ .

Supongamos conocidos todos los términos  $u_i, v_i, A_i$  hasta el orden  $n-1$ . El segundo término de (2.22) permite entonces calcular  $U_n$  y de esta forma, aplicando las relaciones (2.23) y (2.24), completar el orden  $n$  obteniendo los valores de  $u_n, A_n$  y  $B_n$ .

## 2.4. Aplicación del método KBM a un sistema cuasi-kepleriano

Como ya se ha visto, el movimiento en su plano de un sistema cuasi-kepleriano, que viene dado por la ecuación (2.5) puede ponerse, tras la aplicación de una transformación de Binet en la forma

$$\frac{du^2}{d\theta^2} + \omega^2 u = \epsilon (\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 u + \mathcal{M}_2 u^2 + \dots),$$

donde los valores de  $\mathcal{M}_n, n \neq 1$ , vienen dados en (2.11), mientras que  $\omega$  y  $\mathcal{M}_1$  pueden elegirse de dos formas distintas: (2.9) y (2.10).

Puesto que la aplicación de la transformación de Binet al problema de Kepler conduce a un oscilador armónico de frecuencia unidad (ver Anexo C), y puesto que consideramos el sistema kepleriano como una aproximación al cuasi-kepleriano, elegiremos la expresión (2.9), con lo que el sistema tendrá la forma

$$\frac{du^2}{d\theta^2} + u = \epsilon (\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 u + \mathcal{M}_2 u^2 + \dots), \quad (2.25)$$

donde los valores de las  $\mathcal{M}_n$  vienen dados en (2.9) y (2.11). Esta ecuación es idéntica a (2.12), con  $\tau = \theta, \omega = 1$  y

$$F(u, v; \epsilon) = \epsilon (\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 u + \mathcal{M}_2 u^2 + \dots) = F(u, -; \epsilon) = F(u; \epsilon),$$

es decir, con una perturbación (2.13) que no depende de la velocidad y tiene forma polinómica en  $u$ .

El método KBM construye la solución orden a orden partiendo de una solución conocida de orden cero que coincidirá con la solución del problema kepleriano dado en el Anexo (C). La notación tradicional del problema de Kepler llama anomalía verdadera  $f$  al ángulo de coordenadas polares entre la línea de los ápsides (o eje de la cónica solución del problema) y la dirección del vector de posición del cuerpo. Este ángulo  $f$  representa la fase  $\varphi$  de la solución, de manera que se tiene  $u = \delta \cos f$ . Por extensión del lenguaje nosotros usaremos  $f$  en lugar de  $\varphi$  como nueva notación para la fase, y llamaremos a este ángulo **anomalía verdadera generalizada**.

De acuerdo con (2.14) y (2.15) y (2.17), la solución de (2.25) tendrá la forma

$$\begin{aligned} u(\delta, f) &= u_0(\delta, f) + \epsilon u_1(\delta, f) + \frac{\epsilon^2}{2} u_2(\delta, f) + \dots, \\ \frac{d\delta}{d\theta} &= A_0(\delta) + \epsilon A_1(\delta) + \frac{\epsilon^2}{2} A_2(\delta) + \dots, \\ \frac{df}{d\theta} &= B_0(f) + \epsilon B_1(f) + \frac{\epsilon^2}{2} B_2(f) + \dots \end{aligned} \quad (2.26)$$

siendo

$$u_0 = \delta \cos f, \quad A_0 = 0, \quad B_0 = 1, \quad (2.27)$$

la solución de orden cero.

En este caso además se tendrá

$$\begin{aligned} F(u; \epsilon) &= F_{0,0} + \epsilon F_{0,1} + \frac{\epsilon^2}{2} F_{0,2} + \dots = \\ &= \epsilon (\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 u + \mathcal{M}_2 u^2 + \dots) = \\ &= \epsilon \left( \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 \left( u_0 + \epsilon u_1 + \frac{\epsilon^2}{2} u_2 + \dots \right) + \mathcal{M}_2 \left( u_0 + \epsilon u_1 + \frac{\epsilon^2}{2} u_2 + \dots \right)^2 + \dots \right) = \\ &= \epsilon (\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 u_0 + \mathcal{M}_2 u_0^2) + \frac{\epsilon^2}{2} (2\mathcal{M}_1 u_1 + 4\mathcal{M}_2 u_0 u_1) + \dots, \end{aligned}$$

y finalmente

$$F_{0,0} = 0, \quad F_{0,1} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 u_0 + \mathcal{M}_2 u_0^2, \quad F_{0,2} = 2\mathcal{M}_1 u_1 + 4\mathcal{M}_2 u_0 u_1, \quad \dots \quad (2.28)$$

Procederemos a aplicar el método KBM obteniendo las expresiones de  $u_n, A_n, B_n$  orden a orden.

### 2.4.1. Orden 1

Para calcular los valores de  $A_1, B_1$  y  $u_1$  obtendremos, en primer lugar, el valor de  $U_1$ , expresado en función de ángulos múltiples en  $f$  a partir de la relación  $U_1 = F_{0,1} - \Omega_1$  dada en (2.22).

De acuerdo con (2.28) se tiene  $F_{0,1} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 u_0 + \mathcal{M}_2 u_0^2$ , por lo que, considerando que  $u_0 = \delta \cos f$ , se podrá poner

$$F_{0,1} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 (\delta \cos f) + \mathcal{M}_2 (\delta \cos f)^2,$$

igualdad que, expresada en ángulos múltiples en  $f$ , se escribirá como

$$F_{0,1} = \left( \mathcal{M}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{M}_2 \right) + \mathcal{M}_1 \delta \cos f + \frac{1}{2} \mathcal{M}_2 \delta^2 \cos(2f).$$

Calculando el valor de  $\Omega_1$  en la expresión (2.20), obtenemos trivialmente

$$\Omega_1 = 0,$$

de modo que  $U_1$  se escribirá como

$$\begin{aligned} U_1 = F_{0,1} - \Omega_1 &= \left( \mathcal{M}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{M}_2 \right) + \mathcal{M}_1 \delta \cos f + \frac{1}{2} \mathcal{M}_2 \delta^2 \cos(2f) = \\ &= c_0(U_1) + \sum_{j \geq 1} [c_j(U_1) \cos(jf) + s_j(U_1) \sin(jf)], \end{aligned}$$

de donde igualando término a término se tendrá

$$\begin{aligned} c_0(U_1) &= \left( \mathcal{M}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{M}_2 \right), & c_1(U_1) &= \mathcal{M}_1 \delta, & c_2(U_1) &= \frac{1}{2} \mathcal{M}_2 \delta^2, \\ c_n(U_1) &= 0, n > 2, & s_n(U_1) &= 0, n \geq 0. \end{aligned}$$

De esta forma, de acuerdo con (2.23), podremos poner

$$A_1 = -\frac{s_1(U_1)}{2} = 0, \quad B_1 = -\frac{c_1(U_1)}{2\delta} = -\frac{\mathcal{M}_1}{2}, \quad (2.29)$$

y aplicando (2.24) podremos los coeficientes de  $u_1$ ,

$$\begin{aligned} c_0(u_1) &= c_0(U_1) = \mathcal{M}_0 + \frac{1}{2}\mathcal{M}_2\delta^2, \\ c_1(u_1) &= s_1(u_1) = 0, \\ c_2(u_1) &= \frac{c_2(U_1)}{(1-j^2)} = \frac{\mathcal{M}_2\delta^2}{6}, \\ s_2(u_1) &= \frac{s_2(U_n)}{(1-j^2)} = 0, \\ s_n(u_1) &= c_n(u_1) = 0, \quad \text{para cada } n \geq 3, \end{aligned}$$

obteniéndose finalmente

$$\begin{aligned} u_1 = u_1(\delta, f) &= c_0(u_1) + \sum_{j \geq 1} [c_j(u_1) \cos(jf) + s_j(u_1) \sin(jf)] = \\ &= \frac{2\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_2\delta^2}{2} - \frac{\mathcal{M}_2\delta^2}{6} \cos(2f). \end{aligned} \quad (2.30)$$

### 2.4.2. Orden 2

Procederemos de forma análoga al caso  $n = 1$ , calculando el desarrollo en serie de Fourier de  $U_2 = F_{0,2} - \Omega_2$ . Para ello, llevando a la expresión (2.28), de  $F_{0,2}$ , los valores de  $u_0$  obtenidos en (2.27) y  $u_1$  obtenido en (2.30), tendremos

$$\begin{aligned} F_{0,2} &= 2\mathcal{M}_1 u_1 + 4\mathcal{M}_2 u_0 u_1 \\ &= 2\mathcal{M}_1 \left( \frac{2\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_2\delta^2}{2} - \frac{\mathcal{M}_2\delta^2}{6} \cos(2f) \right) + 4\mathcal{M}_2 (\delta \cos f) \left( \frac{2\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_2\delta^2}{2} - \frac{\mathcal{M}_2\delta^2}{6} \cos(f) \right), \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} F_{0,2} &= (2\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_2\delta^2) \mathcal{M}_1 + \frac{\mathcal{M}_2\delta(12\mathcal{M}_0 + 5\mathcal{M}_2\delta^2)}{3} \cos f - \\ &- \frac{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\delta^2}{3} \cos(2f) - \frac{\mathcal{M}_2^2\delta^3}{3} \cos(3f). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Considerando los valores de  $A_0, A_1, B_0, B_1, u_0, u_1$  obtenidos en (2.27), (2.29) y (2.30), y sustituyendo los términos no nulos en (2.20), se obtendrá el valor de  $\Omega_2$  en la forma

$$\Omega_2 = 2 \left( 2B_0B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial f^2} + B_1^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial f^2} \right) = -\frac{\mathcal{M}_1^2\delta}{2} \cos(f) - \frac{4\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\delta^2}{3} \cos(2f). \quad (2.32)$$

Juntando las expresiones (2.31) y (2.32) llegaremos, finalmente a la expresión

$$\begin{aligned} U_2 = F_{0,2} - \Omega_2 &= (2\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_2\delta^2) \mathcal{M}_1 + \frac{\delta(24\mathcal{M}_2\mathcal{M}_0 + 10\mathcal{M}_2^2\delta^2 + 3\mathcal{M}_1^2)}{6} \cos f + \\ &+ \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\delta^2 \cos(2f) - \frac{\mathcal{M}_2^2\delta^3}{3} \cos(3f) = \\ &= c_0(U_2) + \sum_{j \geq 1} [c_j(U_2) \cos(jf) + s_j(U_2) \sin(jf)]. \end{aligned}$$

Al igual que antes, igualando término a término se tendrá

$$\begin{aligned} c_0(U_2) &= (2M_0 + M_2\delta^2)M_1, & c_1(U_2) &= \frac{\delta(24M_2M_0 + 10M_2^2\delta^2 + 3M_1^2)}{6} \\ c_2(U_2) &= M_1M_2\delta^2, & c_3(U_2) &= -\frac{M_2^2\delta^3}{3} \\ c_n(U_2) &= 0, \quad n \geq 4, & s_n(U_1) &= 0, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

De esta forma, de acuerdo con (2.23), podremos poner

$$A_2 = -\frac{s_1(U_2)}{2} = 0, \quad B_2 = -\frac{c_1(U_2)}{2\delta} = -\frac{\delta(24M_2M_0 + 10M_2^2\delta^2 + 3M_1^2)}{12},$$

y aplicando (2.24) podremos calcular el valor de los coeficientes de  $u_2$

$$\begin{aligned} c_0(u_2) &= c_0(U_2) = (2M_0 + M_2\delta^2)M_1 \\ c_1(u_2) &= s_1(u_2) = 0, \\ c_2(u_2) &= \frac{c_2(U_1)}{1-2^2} = -\frac{M_1M_2\delta^2}{3}, \\ c_3(u_2) &= \frac{c_3(U_2)}{1-3^2} = \frac{M_2^2\delta^3}{24}, \\ s_2(u_2) &= s_3(u_2) = 0, \\ s_n(u_2) &= c_n(u_2) = 0, \quad \text{para cada } n \geq 4, \end{aligned}$$

obteniéndose finalmente

$$\begin{aligned} u_2 = u_2(\delta, f) &= c_0(u_2) + \sum_{j \geq 1} [c_j(u_2) \cos(jf) + s_j(u_2) \sin(jf)] = \\ &= (2M_0 + M_2\delta^2)M_1 - \frac{M_1M_2\delta^2}{3} \cos(2f) + \frac{M_2^2\delta^3}{24} \cos(3f). \end{aligned} \quad (2.33)$$

### 2.4.3. Solución hasta orden dos

Reuniendo las expresiones (2.30) y (2.33) anteriores, podremos escribir, hasta orden dos, el valor de la función  $u(\delta, f)$  en la forma

$$\begin{aligned} u(\delta, f) &= \delta \cos f \\ &+ \epsilon \left[ \frac{2M_0 + M_2\delta^2}{2} - \frac{M_2\delta^2}{6} \cos(2f) \right] \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2} \left[ (2M_0 + M_2\delta^2)M_1 - \frac{M_1M_2\delta^2}{3} \cos(2f) + \frac{M_2^2\delta^3}{24} \cos(3f) \right] \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

Teniendo en cuenta los valores de  $A_0, A_1, A_2$  y utilizando a (2.15), podemos expresar la relación diferencial de la amplitud con respecto a  $\theta$  como

$$\frac{d\delta}{d\theta} = 0 + \dots,$$

lo que indica que, hasta orden dos, la amplitud  $\delta$  es una constante que, obviamente, coincide con la amplitud del problema de Kepler.

De la misma forma, los valores de  $B_0, B_1, B_2$  y (2.15) nos permiten expresar el valor de  $n_f = df/d\theta$ ,

$$n_f = 1 + \epsilon \left( \frac{-M_1}{2} \right) + \frac{\epsilon^2}{2} \left( \frac{-24M_0M_2 - 10M_2^2\delta^2 - 3M_1^2}{12} \right) + \dots \quad (2.35)$$

De esta forma, suponiendo que el instante inicial se corresponde con el valor  $\theta_0 = 0$ , lo que significa, de acuerdo con lo visto en el Anexo (C), que el cuerpo pasa por el periastro, podremos decir que, hasta orden dos, se verifica

$$f = n_f \theta.$$

## 2.5. Trayectoria de un sistema cuasi-kepleriano en su plano

Para comprender mejor el movimiento de un sistema cuasi-kepleriano compararemos éste con el sistema kepleriano presentado en el Anexo (C). Para ello, al igual que allí, obtendremos la ecuación,  $r(f)$ , de la órbita y la relación entre  $t$  y  $f$  que permite conocer en cada instante la posición de la partícula.

Hasta aquí se ha obtenido la solución de la ecuación (2.8) para la función  $u = u(\theta)$ , dada en (2.34), en función de las variables independientes  $\delta(\theta)$  y  $f(\theta)$ . Para expresar  $r$  en función de  $f$  bastará tener en cuenta la relación entre  $u$  y  $r$  dada por (2.6), lo que conduce a

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{\mu}{G^2} + \delta \cos f + \epsilon u_1(\delta, f) \frac{\epsilon^2}{2} u_2(\delta, f) = \\ &= \frac{\mu}{G^2} \left( 1 + \left( \frac{G^2}{\mu} \delta \cos f \right) \right) + \epsilon u_1(\delta, f) + \frac{\epsilon^2}{2} u_2(\delta, f) = \\ &= \frac{1 + e \cos f}{p} + \epsilon u_1(\delta, f) + \frac{\epsilon^2}{2} u_2(\delta, f), \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde, al igual que en el Anexo (C), hemos introducido las constantes

$$p = \frac{G^2}{\mu}, \quad e = \delta \frac{G^2}{\mu}, \quad a = \frac{p}{1 - e^2},$$

que, al igual que allí, representan el semilado-recto, la excentricidad y el semieje<sup>1</sup> de la órbita.

Si tenemos en cuenta la fórmula iterativa

$$c_0 = \frac{1}{a_0}, \quad c_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a_i c_{n-i},$$

que nos da los términos de la serie de potencias inversa

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} c_n = \frac{1}{\sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} a_n},$$

podemos obtener  $r$  sin más que invertir la expresión (2.36), quedando

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} + \epsilon r_1(\delta, f) + \frac{\epsilon^2}{2} r_2(\delta, f), \quad (2.37)$$

<sup>1</sup> Al igual que en el caso kepleriano nos limitaremos a considerar al caso elíptico,  $e < 1$ , por lo que podemos introducir el semieje mayor  $a$  tal como aparece en la expresión.

siendo

$$r_1(\delta, f) = \frac{p^2 (\mathcal{M}_2 \delta^2 \cos(2f) - 6A)}{6(1 + e \cos f)^2},$$

$$r_2(\delta, f) = \frac{p^2}{(1 + e \cos f)^2} \left[ -A \mathcal{M}_1 + \frac{p(72A^2 - \mathcal{M}_2^2 \delta^4)}{36(1 + e \cos f)} - \mathcal{M}_2 \delta^2 \left( \frac{2Ap}{(1 + e \cos f)} + \mathcal{M}_1 \right) \cos(2f) - \frac{1}{24} \mathcal{M}_2 \delta^3 \cos(3f) + \frac{\mathcal{M}_2^2 \delta^4 p}{36(1 + e \cos f)} \cos(4f) \right],$$

y donde  $A$  se ha definido como

$$A = \mathcal{M}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{M}_2 \delta^2.$$

Observemos que el término de orden cero de (2.37) coincide con la ecuación de la cónica solución del problema de Kepler, y que puede considerarse como la órbita osculatriz instantánea del problema quasi-kepleriano.

Para encontrar la relación entre  $t$  y  $f$  tendremos en cuenta las expresiones (2.6) y (2.35), que conducen a

$$G n_f dt = r^2 df, \quad (2.38)$$

de donde, eligiendo como instante inicial  $t = T$  aquél para el cual  $f = 0$ , que coincide con el periastro de la órbita kepleriana, podremos poner

$$G n_f (t - T) = \int_0^f r^2 df. \quad (2.39)$$

Elevando al cuadrado (2.37) obtenemos

$$r^2 = \left( \frac{p^2}{(1 + e \cos f)^2} \right) + \epsilon \tilde{r}_1(\delta, f) + \frac{\epsilon^2}{2} \tilde{r}_2(\delta, f), \quad (2.40)$$

siendo

$$\tilde{r}_1 = \frac{p^3}{(1 + e \cos f)^3} (-2A + \mathcal{M}_2^2 \delta^3 \cos 2(f)),$$

$$\tilde{r}_2 = \frac{p^3}{(1 + e \cos f)^4} \left[ \left( \frac{1}{12} p \mathcal{M}_2 \delta^4 - 2(1 + e \cos f) \mathcal{M}_1 + 6pA^2 \right) + \frac{2}{3} \mathcal{M}_2 \delta^2 (\mathcal{M}_1 (1 + e \cos f) - 3Ap) \cos(2f) - \left( (1 + e \cos f) \frac{1}{12} \mathcal{M}_2^2 \delta^3 \right) \cos(3f) + \frac{1}{12} \mathcal{M}_2^2 \delta^4 p \cos(4f) \right].$$

Para simplificar el proceso de cálculo de las integrales en (2.39) introduciremos una nueva variable  $W$  en la forma

$$W = 1 + e \cos f, \quad \cos f = \frac{W - 1}{e}.$$

de este modo, las expresiones en ángulos múltiples en  $f$ , que aparecen en  $\tilde{r}_1$  y  $\tilde{r}_2$ , pueden expresarse como potencias de  $W$  sin más que aplicar las propiedades de los polinomios de Chebyshev que aparecen en el Anexo (D),

$$\cos nf = T_n(\cos f) = T_n\left(\frac{W - 1}{e}\right), \quad \sin nf = \sin f U_{n-1}(\cos f) = \sin f U_{n-1}\left(\frac{W - 1}{e}\right).$$

Así, la expresión (2.40) se transforma en

$$r^2 = \frac{C_0}{W^2} + \epsilon \left( \frac{C_1}{W} + \frac{C_2}{W^2} + \frac{C_3}{W^3} \right) + \frac{\epsilon^2}{2} \left( C_4 + \frac{C_5}{W} + \frac{C_6}{W^2} + \frac{C_7}{W^3} + \frac{C_8}{W^4} \right), \quad (2.41)$$

donde  $C_i$ ,  $i = 0, \dots, 8$ , son constantes que dependen de  $(p, e, M_0, M_1, M_2)$  y definidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
C_0 &= p^2, \\
C_1 &= \frac{2p^3 M_2 \delta^2}{3e^2}, \\
C_2 &= -\frac{4p^3 M_2 \delta^2}{3e^2}, \\
C_3 &= \frac{p^3 (2M_2 \delta^2 (1 - e^2) - 6Ae^2)}{3e^2}, \\
C_4 &= \frac{p^3 M_2 \delta^3 (2p\delta - e)}{3e^4}, \\
C_5 &= \frac{p^3 M_2 \delta^2 (4M_1 e^2 - 8pM_2 \delta^2 + 3M_2 \delta e)}{3e^4}, \\
C_6 &= -\frac{p^3 M_2 \delta^2 (48pAe^2 + 32M_1 e^2 + M_2 \delta (8p\delta e + 12e - 48p\delta - 3e^3))}{12e^4}, \\
C_7 &= -\frac{p^3}{12e^4} (3M_2^2 \delta^3 e^3 + 24AM_1 e^4 + 8M_1 M_2 \delta^2 e^4 - 16M_1 M_2 \delta^2 e^2 - \\
&\quad - 16pM_2 \delta^4 e^2 - 4M_2 \delta^3 e - 96pAM_2 \delta e^2 + 32pM_2^2 \delta^4), \\
C_8 &= \frac{p^4 (36A^2 e^4 - 24AM_2 \delta^2 e^2 + 12AM_2 \delta^2 e^4 + M_2^2 \delta^4 (4 + e^4 - 4e^2))}{6e^4}.
\end{aligned}$$

Llevando la expresión (2.41) al segundo miembro de (2.38) nos encontramos con la necesidad de obtener cuadraturas del tipo

$$\int \frac{1}{W^k} df = \int \frac{1}{(1 + e \cos f)^k} df, \quad k > 0. \quad (2.42)$$

Para ello aplicaremos una transformación idéntica a la definida en (C.8) y (C.9) para el movimiento kepleriano

$$\cos f = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \quad \sin f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}.$$

Esta transformación relaciona la anomalía verdadera,  $f$ , con otro ángulo,  $E$ , llamado **anomalía excéntrica**, de manera que se tiene

$$\frac{\eta^2}{1 + e \cos f} = (1 - e \cos E), \quad df = \frac{\eta}{1 - e \cos E} dE,$$

donde  $\eta = \sqrt{1 - e^2}$  es una constante. De esta manera las cuadraturas del tipo (2.42) se transforman en cuadraturas de la forma

$$\int \frac{1}{W^k} df = \eta^{1-2k} \int (1 - e \cos E)^{k-1} dE, \quad k > 0. \quad (2.43)$$

Con esto hemos convertido las expresiones racionales de funciones trigonométricas en polinomios, mucho más sencillos de integrar.

Finalmente si integramos (2.39) usando las expresiones (2.41) y (2.43) se obtendrá, tras multiplicar ambos miembros por  $\eta^3/p^2$ , la expresión



$$\begin{aligned}
n(t - T) = & (E - e \sin E) + \\
& + \epsilon \left( \frac{\eta E}{2p^2} (2C_1 + C_2\eta^2 + C_3\eta^4 (2 + e^2)) - \frac{\eta^3 e}{2p^2} (C_2 + C_3\eta^2) \sin E + \frac{C_3\eta^5 e^2}{4p^2} \sin(2E) \right) + \\
& + \frac{\epsilon^2}{2} \left[ \frac{\eta E}{p^2} \left( C_5 + C_6\eta^2 + C_7\eta^4 \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{C_8\eta^6}{p^2} \left( 1 + \frac{3}{2}e^2 \right) \right) - \right. \\
& - \frac{\eta^3}{p^2} \left( C_6 + 2C_7\eta^2 + C_8\eta^4 \left( 3 - \frac{3}{4}e^2 \right) \right) \sin E + \\
& \left. + \frac{\eta^5 e^2}{p^2} \left( \frac{1}{4}C_7 - \frac{3}{4}C_8\eta^2 \right) \sin(2E) - \frac{1}{12}C_8 e^3 \sin(3E) + C_4 f \right].
\end{aligned} \tag{2.44}$$

donde  $n = n_f \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ , se denominará **movimiento medio generalizado**, y coincide con el movimiento medio cuando estamos en el caso kepleriano ( $n_f = 1$ ).

Por analogía con la ecuación (C.10), la ecuación (2.44) se llamará **ecuación de Kepler generalizada** o **ley horaria del movimiento** (hasta orden dos) correspondiente al sistema quasi-kepleriano en cuestión.

## 2.6. Precesión del periastro en sistemas quasi-keplerianos

Como se ve en (B.2), el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas central, y por tanto para los sistemas quasi-keplerianos, tiene lugar en un plano fijo. De esta manera, la línea de los nodos que, como se indica en el Anexo (C), es la intersección del plano de la órbita con el plano  $Oxy$  de un sistema de referencia inercial, tiene una dirección fija en el espacio. Como consecuencia tanto el ángulo del nodo,  $\Omega$ , como la inclinación,  $i$ , de la órbita son constantes del problema. De esta forma en estos sistemas no aparece el fenómeno de precesión del nodo que sí aparece cuando las fuerzas que perturban al sistema kepleriano tienen componente no nula en la dirección del momento angular.

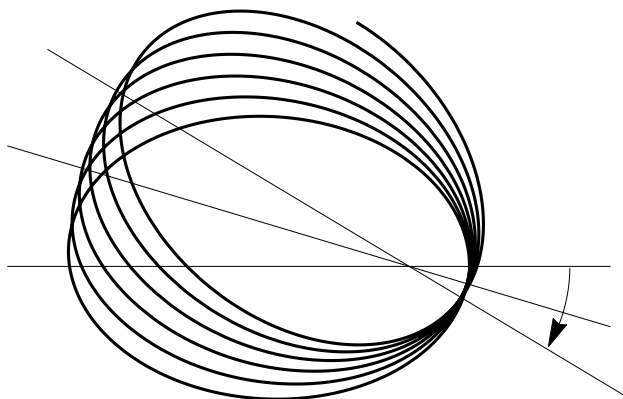


Figura 2.1: Precesión del periastro de un sistema quasi-kepleriano

Si atendemos a las expresiones (2.37) y (2.44), particularizadas a un caso en el que  $e < 1$ , podemos obtener el movimiento en su plano de un sistema quasi-kepleriano. Este movimiento, que puede verse en la figura (2.1), se presenta como una figura próxima a una elipse cuyo eje va girando lentamente. Este movimiento de rotación del eje de la figura se denomina **precesión del periastro**, y lo denotaremos como  $\Delta\omega$  porque va asociado a la variación del ángulo  $\omega$ .

Para calcular el valor de la precesión del periastro  $\Delta\omega$  supondremos que en el instante inicial la línea de los ápsides, que representa la dirección del periastro de la órbita, y desde la que se mide el ángulo

$f$ , coincide con el eje polar, desde el que se mide el ángulo  $\theta$ . Luego si llamamos  $\omega$  al ángulo entre la dirección del periastro y el eje polar tendremos que  $\omega_0 = 0$ .

En otro instante cualquiera el ángulo  $\theta$  se podrá poner como la suma del ángulo  $f$  desde el periastro hasta el cuerpo más el ángulo  $\omega$  entre el periastro y el eje polar. Así pues obtendremos  $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \omega$  a partir de la diferencia  $\theta - f$ .

Teniendo en cuenta (2.35), podemos poner

$$\frac{d(\theta - f)}{d\theta} = \frac{d\theta}{d\theta} - \frac{df}{d\theta} = 1 - n_f,$$

de donde, hasta orden uno

$$1 - n_f = \epsilon \left( \frac{\mathcal{M}_1}{2} \right), \quad (2.45)$$

y, por (2.9), puede ser expresado en función de los coeficientes  $k_n$  de la expresión (2.4) de la fuerza  $f(r)$  de un sistema cuasi-kepleriano en la forma

$$1 - n_f = \frac{\epsilon}{2G^2} \left( k_3 + 2k_4 \frac{\mu}{G^2} \right).$$

Finalmente, para calcular la variación  $\Delta\omega$  en cada vuelta, bastará calcular la integral

$$\Delta\omega = \int_0^{2\pi} (1 - n_f) d\theta = 2\pi \omega_f = \frac{\pi\epsilon}{G^2} \left( k_3 + 2k_4 \frac{\mu}{G^2} \right), \quad (2.46)$$

que nos da la precesión, por vuelta, en primer orden, de un sistema cuasi-kepleriano. Observemos que un signo positivo de  $\Delta\omega$  nos indica que la dirección del periastro avanza, mientras que un valor negativo nos indica que retrocede.

### 2.6.1. Aplicación al movimiento secular del perihelio de Mercurio

Como se ha dicho en la introducción, uno de los ejemplos de la precesión del periastro más conocidos históricamente ha sido el de la variación del perihelio de Mercurio. No fue hasta 1915 en que Einstein consigue dar una explicación y una expresión satisfactoria para dicha variación, encontrando que, en cada vuelta, el efecto sobre la órbita, debido al efecto de la Teoría de la Relatividad, es igual a

$$\Delta\omega = \frac{24\pi^3 a^2}{P^2 c^2 (1 - e^2)}, \quad (2.47)$$

donde  $P$  es el periodo de la órbita de Mercurio,  $a$  y  $e$  su semieje mayor y su excentricidad, y  $c$  la velocidad de la luz (cfr. Einstein [8, Ec. (14), pág. 839]).

La complejidad del uso de la Teoría de la Relatividad en la resolución del problema y el pequeño valor del efecto relativista han conducido a la búsqueda de diferentes modelos, basados en la Mecánica Newtoniana, que expliquen de manera suficientemente aproximada la variación del perihelio de Mercurio.

Reproduciremos aquí dos modelos diferentes: el modelo de Manev exclusivamente gravitatorio, y el modelo basado en las expresiones de la Relatividad.

#### Cálculo del perihelio de Mercurio con fuerzas del tipo Manev

En primer lugar se propone para explicar la precesión del perihelio de Mercurio un sistema cuasi-kepleriano con fuerzas de tipo Manev (cfr. [14, §1, (2), pág. 313]), de manera que la fuerza tenga la siguiente forma

$$f(r) = \frac{\mu}{r^2} \left( 1 + \frac{6\mu}{c^2 r} \right) = -\frac{\mu}{r^2} - \epsilon \left( \frac{6\mu^2}{r^3} \right),$$

donde  $\epsilon = 1/c^2$ , siendo  $c$  es la velocidad de la luz.

Comparando esta expresión con la expresión general (2.4) comprobamos que el valor de las constantes  $k_i$  es

$$k_3 = 6\mu^2, \quad k_4 = 0,$$

que llevadas a (2.46) nos dan un valor

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\mu^2}{c^2 G^2}. \quad (2.48)$$

Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler, que nos dice que  $\mu = 4\pi^2 a^3 / P^2$ , la expresión anterior se transforma en otra idéntica a la expresión (2.47), dada por Einstein.

### Cálculo del perihelio de Mercurio con un modelo relativista

A continuación se presenta un modelo basado en una fuerzas del tipo (2.4) para el que las ecuaciones del movimiento son formalmente idénticas a las ecuaciones del movimiento relativistas ( *cfr.* [21, §1, Ec. (1)] ). Este modelo se formula a través de la expresión de la fuerza dada por

$$f(r) = -\frac{\mu}{r^2} \left( 1 + \frac{3G^2}{c^2 r^2} \right) = -\frac{\mu}{r^2} - \epsilon \left( \frac{3\mu G^2}{r^4} \right),$$

donde, como antes, hemos tomado  $\epsilon = 1/c^2$ .

Procediendo de manera análoga al modelo de Manev obtenemos unos valores de las constantes  $k_i$

$$k_3 = 0, \quad k_4 = 3\mu G^2,$$

que llevadas a (2.46) nos dan un valor

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\mu^2}{c^2 G^2},$$

que es idéntico a (2.48), por lo que, aplicando de nuevo la tercera ley de Kepler, obtenemos un valor para la precesión del perihelio de Mercurio idéntico al obtenido por Einstein, (2.47).

Hay que destacar aquí que en ambos casos hemos obtenido el mismo resultado con dos fuerzas completamente diferentes. En el primero la fuerza perturbadora es proporcional al cubo del inverso de la distancia, mientras que en el segundo caso es proporcional al inverso de la cuarta potencia de la distancia. La expresión (2.9) de la constante  $\mathcal{M}_1$  que combina los coeficientes  $k_3$  y  $k_4$  permite este resultado. Obviamente, si queremos aumentar la precisión de los cálculos, pasando al segundo orden, los resultados serán diferentes. Sin embargo esa diferencia será muy pequeña porque será proporcional a  $\epsilon^2 = 1/c^4$ .



# Conclusiones

Se exponen a continuación los principales resultados obtenidos en el desarrollo de la presente Memoria.

- **Formulación de un sistema cuasi-kepleriano generalizado como un oscilador cuasi-lineal:** Los sistemas cuasi-keplerianos son sistemas de fuerza central conservativa. Aplicando los resultados sobre fuerzas centrales conservativas, tomando sistemas de referencia adecuados y aplicando una transformación de Binet, se comprueba que el estudio del movimiento de una partícula en un campo de fuerzas de tipo cuasi-kepleriano generalizado es equivalente al de la ecuación de un oscilador débilmente no lineal.
- **Solución aproximada de un oscilador cuasi-lineal** Utilizando un método de perturbaciones, KBM, que parte de la solución del oscilador lineal, se ha obtenido la solución aproximada del oscilador débilmente no lineal hasta orden dos, con ayuda de un programa de cálculo simbólico, concretamente Maple.
- **Soluciones de sistemas keplerianos y cuasi-keplerianos:** El uso de un método de promedios permite encontrar similitudes y diferencias entre las órbitas solución de un sistema cuasi-kepleriano y las del problema de Kepler, comprobándose que el tamaño, la forma y el plano de la órbita se conservan en ambos casos, no siendo así con el elemento  $\omega$ , que experimenta una variación secular en la órbita del sistema perturbado, llamada **precesión del periastro**.
- **Estudio de la precesión en sistemas cuasi-keplerianos generalizados:** Se ha estudiado la precesión del periastro, particularizada al caso del avance del perihelio de un planeta debido a la influencia de efectos relativistas comprobando que, hasta términos de primer orden, el modelo post-newtoniano no relativista de Manev proporciona los mismos resultados que el modelo relativista propuesto por Einstein.



# Bibliografía

- [1] A. ABAD, *Astrodinámica*, Bubok Publishing, S.L. 2012, <https://www.bubok.es/libros/219952/Astrodinamica>
- [2] A. ABAD, J.F. SAN-JUAN, A. GAVÍN, Short term evolution of artificial satellites, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **79** (2001), 277–296.
- [3] M.ABRAMOWITZ, I. A. AND STEGUN, *Orthogonal Polynomials. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover, 1972 (9th printing).
- [4] G.S. ADKINS, J. McDONELL, Orbital precession due to central-force perturbations, *Physical Review D* **75** (8) (2007) id. 082001.
- [5] S. AOKI, The Moon–Test in Newton’s “Principia”: Accuracy of Inverse–Square Law of Universal Gravitation, *Archive for History of Exact Sciences* **44** (2) (1992), 147–190.
- [6] G. BERTRAND, La loi de Newton et la formule d’Einstein pour le périhélie des planètes, *Comptes rendus de l’Académie des Sciences de Paris* **173** (1921), 438–440.
- [7] A. DEPRIT, The Elimination of the Parallax in Satellite Theory, *Celestial Mechanics* **24** (2) (1981), 111–153.
- [8] A. EINSTEIN, Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie, *Sitzungsberichte der Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin)* **47** (2) (1915), 831–839.
- [9] L. FLORÍA, Canonical Elements and Keplerian–like Solutions for Intermediary Orbits of Satellites of an Oblate Planet, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **57** (1–2) (1993), 203–223.
- [10] L. FLORÍA, *Intermediarios radiales y generalizaciones de las variables de tipo Delaunay–Scheifele. Aplicación al movimiento orbital de satélites artificiales* (Tesis Doctoral), Universidad de Valladolid, 1993.
- [11] L. FLORÍA, Some Remarks on the Treatment of Quasi-Keplerian Systems, *Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza* **28** (2006), 137–148.
- [12] G.R. FOWLES, *Analytical Mechanics (Fourth Edition)*, Prentice-Hall, Inc.Saunders Golden Sunburst Series. Saunders College Publishing. Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, 1986
- [13] H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics (Second Edition)*, Prentice-Hall, Inc., 1980.
- [14] S. KIRK, I. HARANAS, I. GKIGITZIS, Satellite motion in a Manev potential with drag, *Astrophysics and Space Science* **344** (2) (2013), 313–320.
- [15] M. KLINE, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, (Fourth printing, 1976), Oxford University Press, New York, 1972.  
Edición en Castellano: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Universidad, vols. **715**, y **724** y **729**.Alianza Editorial, Madrid, 1992.

- [16] G. MANEFF, Die Gravitation und das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung, *Zeitschrift für Physik* **31** (1925), 786–802.
- [17] G. MANEFF, Die Masse der Feldenergie und die Gravitation, *Astronomische Nachrichten* **236** (24) (1929), 401–406.
- [18] G. MANEFF, La gravitation et l'énergie au zéro, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **190** (1930), 1374–1377.
- [19] L. MEIROVITCH, *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill Series in Advanced Engineering. McGraw-Hill, 1970.
- [20] I. NEWTON, *Principios matemáticos de la Filosofía Natural*, (dos volúmenes) Alianza Universidad (Ciencias), vols. **511** y **512**. Alianza Editorial, Madrid, 1987.
- [21] D.P. RUBINCAM, General relativity and satellite orbits: The motion of a test particle in the Schwarzschild metric, *Celestial Mechanics* **15** (1977), 21–33.
- [22] D. R. SMITH, *Singular-perturbation theory. An introduction with applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [23] F. F. TISSERAND, *Traité de Mécanique Céleste*, vol III (Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la Lune), Gauthier-Villars, Paris, 1894. (Reimpresión: Éditions Jacques Gabay, Paris, 1990).
- [24] S. R. VALLURI, C. WILSON, W. HARPER, Newton's Apsidal Precession Theorem and Eccentric Orbits, *Journal for the History of Astronomy* **28** (1) (1997), 13–27.



## Anexo A

# Oscilador armónico simple

Llamaremos **oscilador armónico simple unidimensional** a una función real  $u = u(\tau)$ , de variable real  $\tau$ , que es solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + \omega^2 u = 0, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\omega$  es una constante que denominaremos **frecuencia** angular del oscilador.

La solución general de esta ecuación es

$$u(\tau) = c_1 \cos(\omega \tau) + c_2 \sin(\omega \tau),$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son dos constantes arbitrarias de integración que, en función de las condiciones iniciales, pueden ponerse como

$$c_1 = u(0), \quad c_2 = \frac{u'(0)}{\omega},$$

siendo  $u'(\tau) = du(\tau)/d\tau$ .

Definiendo

$$\delta = \sqrt{c_1^2 + c_2^2},$$

como la **amplitud** de la oscilación, podemos escribir  $u(\tau)$  como

$$u(\tau) = \delta \left[ \frac{c_1}{\delta} \cos \varphi + \frac{c_2}{\delta} \sin \varphi \right], \quad (\text{A.2})$$

y dado que

$$\left| \frac{c_1}{\delta} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{c_2}{\delta} \right| \leq 1, \quad \frac{c_1^2 + c_2^2}{\delta^2} = 1,$$

existe  $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ , que llamaremos **fase inicial**, de modo que

$$\cos \varphi_0 = \frac{c_1}{\delta}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{c_2}{\delta},$$

pudiéndose reescribir la solución (A.2) de la ecuación como

$$u(\tau) = \delta (\cos \varphi_0 \cos \omega \tau + \sin \varphi_0 \sin \omega \tau),$$

y finalmente

$$u(\tau) = \delta \cos(\omega \tau - \varphi_0), \quad (\text{A.3})$$

donde el ángulo  $\varphi = \omega \tau - \varphi_0$  se llama **fase** del oscilador.



## Anexo B

# Fuerza central y movimiento plano

En este anexo se revisa el concepto de campo de fuerzas central y algunas de sus propiedades de tipo geométrico y dinámico, ideas que pueden consultarse en libros como Goldstein [13, Cap. 3]; Meirovitch [19, Cap. 1, §1.8]; Fowles [12, Cap. 6].

### B.1. El problema de la fuerza central

Cuando hablemos del movimiento de partículas o masas puntuales, consideraremos tales partículas en un espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , entendido como espacio afín euclídeo. Fijaremos en el espacio un sistema de referencia inercial, que será un agregado de la forma  $(O, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ , donde  $O$  representa un punto como origen de la referencia y la terna  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  será una base del espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ , que por conveniencia se tomará como una base ortonormal directa (positivamente orientada).

Asignamos a cada punto  $P \in \mathbb{R}^3$  como coordenadas las componentes del vector  $\mathbf{r} \equiv \overrightarrow{OP}$  respecto de la base  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ . Tal vector, llamado **vector de posición del punto  $P$** , puede variar con respecto a una variable independiente o parámetro (en el sentido de la Geometría Diferencial Clásica de Curvas)  $t$ , que en Mecánica identificaremos con el tiempo. Al referirnos a la posición de una partícula en un instante dado  $t$ , la representaremos por  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . Denotaremos  $r = \|\mathbf{r}\|$  y  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ .

Si fuese necesario, de manera análoga se definiría en  $\mathbb{R}^2$  un sistema de referencia inercial por medio de un punto como origen y una base de  $\mathbb{R}^2$ .

Añadiremos también a la partícula el concepto de **masa  $m$** , como una constante que caracteriza al cuerpo, y el concepto de **fuerza  $F$** , que formaliza matemáticamente las interacciones entre los cuerpos, definida en virtud de la Segunda Ley de Newton como  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = m\ddot{\mathbf{r}}$ .

En Mecánica Clásica el problema de la fuerza central consiste en determinar el movimiento de una partícula bajo la influencia de una **fuerza central  $F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$**  que emana de un punto fijo del espacio, denominado **centro de fuerzas**, y que podemos elegir como origen de coordenadas, de manera que  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  será en cada instante colineal con  $\mathbf{r}$ ,

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}},$$

donde  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$  es el vector unitario en la dirección de la partícula y  $r = \|\mathbf{r}\|$  representa la magnitud del vector de posición. Cuando  $F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) < 0$  la fuerza central es atractiva, mientras que cuando  $F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) > 0$  es repulsiva.

Se define como **fuerza central conservativa** a una fuerza central en que la magnitud de la fuerza en cada instante sólo depende de la norma del vector de posición de la partícula, es decir,

$$F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = F(-, r, -) = F(r). \quad (\text{B.1})$$

Dada una fuerza central conservativa existe una función escalar, llamada función potencial o **potencial**,

$V = V(r)$ , que está relacionada con la fuerza a través de la relación

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\Delta_{\mathbf{r}}V(\mathbf{r}) \implies F(r) = -\frac{dV(r)}{dr}.$$

De acuerdo con la Segunda Ley de Newton de la Mecánica, el movimiento de una partícula de masa  $m$  en un campo central de fuerzas vendrá dado por la ecuación diferencial

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (\text{B.2})$$

que para una fuerza central conservativa se expresará como

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (\text{B.3})$$

## B.2. Movimiento plano y coordenadas polares

El movimiento de una partícula bajo una fuerza central siempre tiene lugar en un plano fijo. Es fácil intuirlo teniendo en cuenta que el vector de posición  $\mathbf{r}$ , la velocidad  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ , y la fuerza  $\mathbf{F}$  están en el mismo plano pues, por ser  $\mathbf{F}$  colineal con a  $\mathbf{r}$ , la componente de la aceleración perpendicular al plano formado por estos tres vectores va a ser nula, y éste va a ser el plano de movimiento de la partícula.

Para demostrar matemáticamente que el movimiento es plano introducimos el vector **momento angular  $\mathbf{G}$  por unidad de masa**, en adelante **momento angular**<sup>1</sup>, definido de la siguiente manera

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Si los vectores  $\mathbf{r}(t)$  y  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  son colineales, o lo que es igual,  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ , el movimiento es rectilíneo. En adelante supondremos que  $\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$ , y por tanto los vectores  $\mathbf{r}(t)$  y  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  definen, en cada instante, un plano  $\Pi(t) = \langle \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle$  llamado **plano instantáneo del movimiento**. El vector  $\mathbf{G}$  es ortogonal a  $\mathbf{r}(t)$  y a  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  por su propia definición, por lo que si podemos comprobar que  $\mathbf{G}$  es constante con respecto al tiempo, también lo será  $\Pi(t)$  y en consecuencia el plano de movimiento será un plano fijo.

Calculando la derivada del vector  $\mathbf{G}$  con respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}.$$

El primer término de la derivada,  $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}$ , es trivialmente cero y el segundo término,  $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$ , es también cero, ya que, de acuerdo con (B.2), la aceleración lleva la misma dirección que la fuerza, y estamos considerando una fuerza central, que lleva la misma dirección que el vector de posición. Esto significa que  $\mathbf{G}(t)$  es un vector constante a lo largo de soluciones de la ecuación (B.2) o una integral primera vectorial del sistema diferencial (B.2).

Esta integral primera vectorial aporta tres integrales primeras funcionalmente independientes, por lo que el problema diferencial (B.2) se puede reducir de orden 6 a orden 3 y, además, nos permite afirmar que el movimiento de la partícula es plano.

Puesto que el movimiento de una partícula bajo una fuerza central transcurre en un plano, podemos escoger en dicho plano un sistema de referencia cuyo origen de coordenadas se hará coincidir con el centro de fuerzas, y dos vectores de ese plano que formen una base ortonormal orientada positivamente. Ahora, cuando nos refiramos a  $\mathbf{r}$  lo consideraremos como  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  donde  $(x(t), y(t))$  son las coordenadas cartesianas de la partícula respecto de dicha base. Al considerar el movimiento plano, podemos escribir el problema diferencial (B.2) en componentes cartesianas en el plano de movimiento,

$$m\ddot{x} = F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \frac{x}{r}, \quad m\ddot{y} = F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \frac{y}{r}.$$

<sup>1</sup>Nótese que este vector difiere en una constante  $m$  de la definición clásica del momento angular de una partícula:  $m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ .

En lugar de usar coordenadas cartesianas resulta muy útil formular este problema en un sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  con origen  $O$  y eje polar definido por el vector  $\mathbf{a}_1$ , donde podremos poner

$$\mathbf{r} = r(\cos \theta, \sin \theta),$$

siendo, por tanto,

$$r = \|\mathbf{r}\|, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Consideremos en cada punto del plano las direcciones radial y transversal definidas mediante los vectores unitarios

$$\mathbf{e}_r = \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta),$$

donde  $\mathbf{e}_\theta$  se obtiene rotando  $\pi/2$  radianes, en sentido positivo, el vector  $\mathbf{e}_r$ . Derivando los vectores  $\mathbf{e}_r$  y  $\mathbf{e}_\theta$  con respecto al tiempo obtenemos

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r.$$

En estas coordenadas se cumple que  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ . Calculando la derivada primera del vector de posición obtenemos el vector velocidad en coordenadas polares:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(r\mathbf{e}_r)}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta.$$

Haciendo lo mismo con la derivada segunda obtenemos el vector aceleración:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta = \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - r\dot{\theta}\mathbf{e}_r = \\ &= \mathbf{e}_r(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \mathbf{e}_\theta(2\dot{\theta}\dot{r} + r\ddot{\theta}). \end{aligned}$$

La ecuación de Newton del movimiento, (B.2), formulada en coordenadas polares planas queda de la forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, r, \dot{r}) = F(t, r, \dot{r})\hat{\mathbf{r}} = F(t, r, \dot{r}, \dot{\theta})\mathbf{e}_r = m\mathbf{a} = m[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{\theta}\dot{r} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta],$$

de donde podemos separar las ecuaciones del movimiento en las direcciones radial y transversal,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(t, r, \dot{r}, \dot{\theta}), \quad m(2\dot{\theta}\dot{r} + r\ddot{\theta}) = 0, \quad (\text{B.4})$$

que en apariencia sigue siendo un problema diferencial de orden 4 para las funciones incógnita  $r = r(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$ . Multiplicando por  $r$  en ambos miembros de la segunda igualdad en (B.4) obtenemos

$$m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 0 \implies \frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} = 0 \implies mr^2\dot{\theta} = \text{cte.}$$

De este modo tenemos una integral primera escalar del sistema diferencial (B.4), que nos permite reducir el orden del sistema a orden 3. Para conocer el valor de la constante que aparece en la ecuación anterior tendremos en cuenta que

$$G = \|\mathbf{G}\| = \|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\| = \|\mathbf{r}\mathbf{e}_r \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)\| = r^2\dot{\theta}\|\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta\| = r^2\dot{\theta}.$$

De esta forma podremos expresar  $\dot{\theta}$  en función de  $r$  en la forma

$$\dot{\theta} = \frac{G}{r^2}. \quad (\text{B.5})$$

Esta última igualdad nos permite poner

$$F(t, r, -, \dot{r}, \dot{\theta}) = F^*(t, r, -, \dot{r}, -) = F^*(t, r, \dot{r}),$$

que introducida, junto con (B.5), a la primera igualdad en (B.4), lleva finalmente el problema diferencial (B.4) a un sistema diferencial de orden 3 para las funciones incógnita  $r = r(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$ , a saber,

$$m\ddot{r} = m\frac{G^2}{r^3} + F^*(t, r, \dot{r}), \quad \dot{\theta} = \frac{G}{r^2}. \quad (\text{B.6})$$

La primera ecuación se puede escribir como

$$m\ddot{r} = F^*(t, r, \dot{r}) + F_{fic}(-, r, -) = F_{ef}(t, r, \dot{r}),$$

donde  $F_{fic}(-, r, -) = F_{fic}(r) = m\frac{G^2}{r^3}$  es una fuerza “ficticia” que aparece por tomar un sistema rotante de vectores  $\mathbf{e}_r$  y  $\mathbf{e}_\theta$ , y  $F_{ef}(t, r, \dot{r})$  es la fuerza “efectiva”, resultado de superponer la fuerza “real”,  $F^*(t, r, \dot{r})$ , y la fuerza “ficticia”  $F_{fic}(r)$ .

En el caso particular de fuerzas centrales conservativas,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r) = F(r)\mathbf{e}_r$ , el sistema (B.6) se reduce a

$$m\ddot{r} = m\frac{G^2}{r^3} + F(r) = F_{ef}(r), \quad \dot{\theta} = \frac{G}{r^2},$$

y, dado que  $m$  tiene un valor constante, podremos expresar finalmente las ecuaciones diferenciales del movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza central conservativa como

$$\ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} + f(r), \quad \dot{\theta} = \frac{G}{r^2}, \quad (\text{B.7})$$

donde hemos llamado

$$f(r) = \frac{F(r)}{m}. \quad (\text{B.8})$$

## Anexo C

# Movimiento kepleriano

Los conceptos y resultados recogidos en este Anexo pueden encontrarse en numerosos libros. A título de ejemplo citamos Abad [1, Parte II]; Goldstein [13, Cap. 3 y cap. 10, §10.7]; Meirovitch [19, Cap. 1, §1.8 y 1.9, y Cap. 11, §11.1]; Fowles [12, Cap. 6, §6.8]

### C.1. Problema gravitatorio de dos cuerpos

El **problema gravitatorio de los dos cuerpos** consiste en el estudio del movimiento de dos partículas, en el espacio tridimensional, de manera que tales partículas sólo interactúan entre sí, siendo la fuerza de interacción entre ellas su mutua atracción gravitatoria según la Ley de Gravitación Universal de Newton. Sean  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  los vectores de posición de tales partículas respecto de un sistema de referencia inercial, y  $m_1$  y  $m_2$  sus masas respectivas. En virtud de la Segunda Ley de Newton las ecuaciones del movimiento de dichas partículas son

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_{21}(-, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, -, -) = \mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_{12}(-, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, -, -) = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

donde  $\mathcal{G}$  es la constante de gravitación universal. Estas ecuaciones constituyen un sistema diferencial de orden 12 (6 ecuaciones diferenciales escalares de orden 2).

En lugar de abordar la resolución del sistema (C.1) consideraremos una transformación dada por las expresiones

$$\begin{cases} \mathbf{r}_c(t) &= \frac{m_1\mathbf{r}_1(t) + m_2\mathbf{r}_2(t)}{M}, \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t), \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

donde  $M = m_1 + m_2$  es la **masa total** del sistema,  $\mathbf{r}_c$  representa la posición del **centro de masas** del sistema de dos partículas, y  $\mathbf{r}$  la posición relativa de  $m_1$  con respecto a  $m_2$ . Esta transformación puede invertirse de manera sencilla por medio de las expresiones

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{r}_c(t) + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}(t), \\ \mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{r}_c(t) - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}(t), \end{cases}$$

de modo que, una vez conocida la evolución temporal de  $\mathbf{r}_c$  y  $\mathbf{r}$ , también podremos conocer la de  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ .

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ , las ecuaciones (C.1) y la definición de  $\mathbf{r}_c$  dada en (C.2), tendremos

$$M \ddot{\mathbf{r}}_c = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0},$$

de donde podemos obtener la solución para el movimiento del centro de masas,

$$\mathbf{r}_c(t) = \mathbf{A}t + \mathbf{B},$$

que nos indica que el centro de masas tiene un movimiento rectilíneo y uniforme caracterizado por los vectores constantes  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , que proporcionan seis integrales primeras funcionalmente independientes del sistema (C.1).

Estas seis integrales pueden ser usadas para reducir el sistema diferencial (C.1) de orden 12 a orden 6, formulando las ecuaciones del movimiento relativo que pueden expresarse en la forma:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left( \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2} \right) = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{21} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \mathbf{F}_{21},$$

o, de forma equivalente, teniendo en cuenta la expresión de  $\mathbf{F}_{21}$  dada en (C.1),

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mathcal{G}(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (\text{C.3})$$

donde hemos introducido la notación  $\mu = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$ , que representa la **constante gravitatoria o parámetro gravitatorio** del movimiento relativo de dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$ .

Llamaremos **problema de Kepler** al problema regido por la ecuación diferencial (C.3), representa el movimiento de un cuerpo respecto al otro en un sistema en el que actúan únicamente las fuerzas de atracción gravitatoria entre ambos cuerpos. La trayectoria de un cuerpo regido por la ecuación del problema de Kepler, se llama **órbita kepleriana**.

La ecuación (C.3) gobierna el movimiento de una partícula de masa unidad en un campo de fuerzas central conservativo que obedece a la ley de fuerzas

$$f(r) = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (\text{C.4})$$

## C.2. La órbita kepleriana en el espacio

Como se ha demostrado en la Sección (B.2), todo movimiento en un campo de fuerzas central es plano, siendo el plano del movimiento perpendicular al vector momento angular  $\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ .

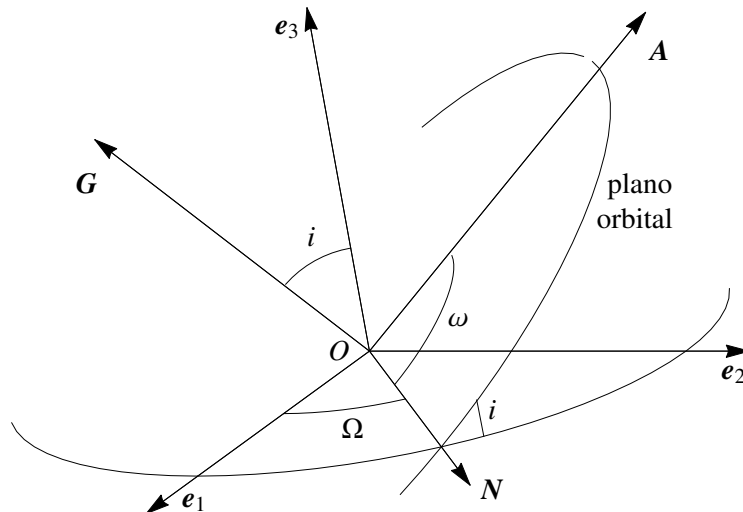


Figura C.1: La órbita kepleriana en el espacio

En la Figura (C.1) podemos ver la posición relativa del vector  $\mathbf{G}$  y de su plano ortogonal, que representa el plano en el que se encuentra la trayectoria solución del problema de Kepler, u órbita kepleriana, respecto a un sistema de referencia inercial ( $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ).



A partir de estos vectores puede definirse el vector  $N = e_3 \times G$ , que es constante por serlo  $e_3$  y  $G$ . La dirección constante  $N$ , llamada **línea de los nodos**, representa la intersección del plano orbital con el plano  $Ox_1x_2$  del sistema inercial y, a través de esta dirección, pueden definirse dos variables angulares: el **ángulo del nodo**  $\Omega$ , y la **inclinación**  $i$ , que determinan la posición del plano orbital respecto al sistema inercial. Obviamente  $N$  es un vector constante contenido en el plano orbital.

En el problema kepleriano también desempeña un importante papel el vector llamado **vector de Laplace**, que se define como

$$A = \dot{r} \times G - \mu \frac{r}{r}. \quad (C.5)$$

Es fácil demostrar, por derivación, que este vector es constante a lo largo de soluciones de la ecuación diferencial vectorial (C.3), y que además se verifica la relación  $A \cdot G = 0$ , o, lo que es igual, que  $A$  es ortogonal a  $G$ , por lo que, como  $N$ , es un vector constante a lo largo de soluciones en el plano orbital. El ángulo  $\omega$  que forma la línea de los nodos con la dirección de  $A$ , también llamada **línea de los apsidés**, se denomina **argumento del periastro**.

### C.3. La órbita kepleriana en el plano orbital

Los elementos anteriores representan la orientación de la órbita kepleriana en el espacio. En lo que sigue caracterizaremos la órbita en su plano, demostrando que se trata de una cónica que tiene a la línea de los ápsides como eje.

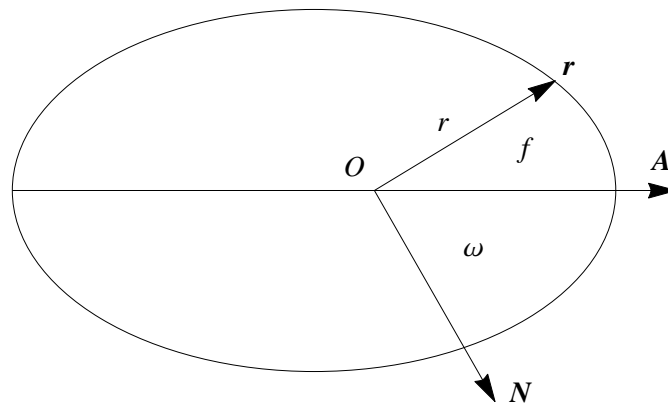


Figura C.2: La órbita kepleriana en el plano de la órbita

Para ello partiremos del sistema diferencial (B.7), que proporciona las ecuaciones del movimiento plano para una fuerza central conservativa  $f(r)$ . En el caso kepleriano tendremos

$$\ddot{r} - \frac{G^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2}.$$

Esta expresión, dada en la Sección (B.2), ha sido obtenida expresando el movimiento en un sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$ , donde  $r$  representa la distancia de  $O$  al cuerpo, y  $\theta$  el ángulo desde un eje fijo en el plano hasta la dirección del vector de posición  $r$  del cuerpo. En el problema kepleriano hemos encontrado dos direcciones fijas, en el plano orbital, que pueden representar el eje fijo del sistema de coordenadas polares: la línea de los nodos ( $N$ ) y la línea de los apsidés ( $A$ ). Tal como puede verse en la figura (C.2) si se elige la línea de los nodos como eje polar se tendrá  $\theta = \omega + f$ , mientras que si se elige la línea de los ápsides tendremos  $\theta = f$ , donde  $f$  es un ángulo llamado **anomalía verdadera**.

Aplicando la transformación de Binet

$$u = \frac{1}{r} - \frac{\mu}{G^2}, \quad dt = \frac{r^2}{G} d\theta,$$

donde hemos tomado  $K = -\mu/G^2$ , se obtendrá la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \mathbf{0},$$

cuya solución, de acuerdo con (A.3) se podrá poner como

$$u(\theta) = \delta \cos(\theta - \varphi_0),$$

donde las constantes  $\delta, \varphi_0$  dependen de las condiciones iniciales.

A partir de la definición (C.5) puede demostrarse fácilmente que  $\mathbf{A} \times \mathbf{r} = r \dot{\mathbf{G}}$ . Por consiguiente, excluyendo el caso de colisión,  $r = 0$ , y de órbita rectilínea,  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ , puede decirse que cuando el cuerpo pase por la línea de los ápsides se tendrá  $\dot{r} = 0$  y por tanto  $u' = 0$ .

Eligiendo la línea de los ápsides como eje polar se tendrá que  $\theta = f, \varphi_0 = 0$ , y por lo tanto

$$u = \frac{1}{r} + \frac{\mu}{G^2} = \delta \cos(f),$$

y finalmente

$$r(f) = \frac{p}{1 + e \cos f}, \quad (\text{C.6})$$

donde hemos llamado

$$p = \frac{G^2}{\mu}, \quad e = \frac{G^2}{\mu} \delta.$$

La expresión (C.6) demuestra que órbita es una cónica de eje la línea de los ápsides, cuyo semilado recto es  $p$  y su excentricidad  $e$ . Además, el instante de paso por  $f = 0$ , coincide con el mínimo de la distancia  $r$  entre el origen  $O$  y la partícula,  $r_p = p/(1 + e)$ , posición que es llamada **periastro**.

Finalmente, para integrar totalmente el sistema kepleriano debemos encontrar la relación de las coordenadas polares con el tiempo  $t$ , para lo cual deberemos resolver la ecuación

$$dt = \frac{r^2}{G} df = \frac{1}{G} \int \frac{p^2}{(1 + e \cos f)^2} dt. \quad (\text{C.7})$$

que representa el cambio de variable independiente de la transformación de Binet.

Para resolver la anterior cuadratura particularizaremos el problema al caso de movimiento elíptico,  $0 \leq e < 1$ , donde en cuyo caso podemos sustituir el semilado recto  $p$  por el **semieje mayor**  $a$  a partir de la relación  $p = a(1 - e^2)$ .

Para integrar (C.7) cambiaremos la variable  $f$  por una nueva variable  $E$ , que llamaremos **anomalía excéntrica**, que se relaciona con la anterior por las expresiones

$$\cos f = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \quad \sin f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad (\text{C.8})$$

a partir de las cuales se obtienen las relaciones

$$\frac{p}{1 + e \cos f} = a(1 - e \cos E), \quad df = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E} dE, \quad (\text{C.9})$$

y finalmente la cuadratura de (C.7) se expresará como

$$dt = \frac{r^2}{G} df = \frac{1}{n} \int (1 - e \cos E) dE,$$

donde

$$n = \frac{G}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

se llama **movimiento medio**. Integrando entre el **instante**  $t = T$  **de paso por el periastro**, para el cual  $f = E = 0$ , y un instante cualquiera se obtendrá, finalmente

$$n(t - T) = E - e \sin E. \quad (\text{C.10})$$

que es la llamada **ecuación de Kepler o ley horaria del movimiento kepleriano elíptico**.

Los elementos  $(a, e, i, \Omega, \omega, T)$  se denominan **elementos orbitales ordinarios** y son seis constantes del movimiento o integrales primeras independientes del problema kepleriano y describen la geometría y la dinámica de una órbita kepleriana.



## Anexo D

# Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev ([3, Cáp. 22, págs. 771–802]) son dos familias de polinomios ortogonales  $T_n(x)$  y  $U_n(x)$  que representan la solución respectiva de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes variables

$$\begin{aligned}(1-x^2)y'' - xy' + n^2y &= 0, \\ (1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y &= 0.\end{aligned}$$

Los polinomios de Chebyshev de primer tipo  $T_n(x)$  pueden obtenerse fácilmente a partir de las relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\end{aligned}\tag{D.1}$$

mientras que los de segundo tipo  $U_n(x)$  se obtienen con las relaciones

$$\begin{aligned}U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x, \\ U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).\end{aligned}\tag{D.2}$$

Aunque los polinomios de Chebyshev resultan de gran utilidad para muchas aplicaciones nosotros nos centraremos únicamente en las consecuencias de una de sus propiedades, a saber:

$$\cos n\varphi = T_n(\cos \varphi), \quad \sin n\varphi = \sin \varphi U_{n-1}(\cos \varphi).\tag{D.3}$$

A partir de estas expresiones pueden obtenerse fácilmente, mediante las sencillas relaciones de recurrencia (D.1) y (D.2), las expresiones de senos y cosenos de ángulos múltiples como potencias de senos y cosenos.