Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Introducción a la derivada en el primer curso de Bachillerato

Introduction to derivative at first year of high school

Autora

Inmaculada Guzmán Sancho

Director/es

Rafael Escolano Vizcarra

Jose María Muñoz Escolano

Facultad de Educación

Año 2016/2017

INDICE

A SOBRE LA DEFINICION DEL OBJETO MATEMATICO A ENSEÑAR

1. Nombra el objeto matemático a enseñar.

El objeto de enseñanza elegido es la introducción de la noción de derivada en el primer curso de Bachillerato. El concepto de derivada es fundamental para el estudio del cálculo; sin embargo, el tratamiento que se le da a este concepto en los centros educativos suele quedar limitado en gran medida, al manejo y aplicación de fórmulas junto con los recursos algebraicos. Ello conlleva que, con frecuencia, se observen deficiencias de conocimiento en los estudiantes con la consiguiente dificultad para ellos de reconocer y aplicar este concepto matemático en contextos no algebraicos.

En este trabajo se pretende estudiar las distintas formas en las que los docentes utilizan el concepto de derivada como objeto de matemático de enseñanza y aprendizaje. Dentro este marco resaltan los dos componentes del conocimiento profesional del profesor relevantes para nuestro estudio, que señalamos a continuación:

1) El papel esencial que tiene el conocimiento matemático en sí mismo y su reflejo en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Proponemos para ello un análisis riguroso y lo más exhaustivo posible del concepto matemático, desde la misma matemática y su historia, iluminando finalmente la enseñanza del concepto elegido y desvelando de este modo la seriedad con la que debemos asumir la transposición de la didáctica de los conceptos matemáticos para ser llevados al aula en cualquiera de los niveles de enseñanza; y

2) La importancia del conocimiento didáctico para la transmisión del contenido matemático, que nos permita realizar una profunda reflexión sobre las formas de transmitir el conocimiento y con las que queremos que los alumnos sean capaces de construir, asimilando el concepto de derivada.

En este segundo apartado nos cuestionaremos sobre las construcciones que deseamos que sean asimiladas por los estudiantes del concepto elegido; ello implicará como diseñamos las actividades didácticas, las tareas y la agenda de enseñanza de tal forma que permitan activar y desarrollar ciertos procesos cognitivos (interiorización, coordinación, etc.) en la búsqueda de las construcciones deseadas (acciones, procesos, objetos y esquemas), que nos facilitarán la comprobación del alcance de la comprensión e interiorización del concepto matemático de la función derivada por parte de los estudiantes.

Al diseñar la enseñanza de un concepto matemático, el docente tiene en cuenta, en función de los estudiantes a los que va dirigida y dentro del contexto escolar y centro donde imparte su docencia, las distintas experiencias y conocimientos que ha ido acumulando previamente en su práctica docente. De esta forma, una parte esencial de la tarea del profesor consiste en el diseño, la elección, la modificación y el uso de distintas tareas centradas hacia un contenido matemático concreto y su utilización hacia el objetivo educativo que se propone conseguir.

2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

El concepto de derivada está incluido en el currículo de matemáticas de primer curso de bachillerato, tanto para las ciencias sociales como para la opción de matemáticas científicas. Nos centraremos en la introducción de la derivada en el curso de primero de bachillerato orientado a las ciencias académicas.

3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Para introducir la definición de derivada en un punto, elegiremos entre distintos campos de problemas que dividiremos en varios grupos. Siendo los primeros los que relacionan la tasa de variación en particular con funciones que nos relacionan el movimiento rectilíneo uniforme de objetos móviles (funciones espacio-tiempo, velocidad media). Otro campo de problemas será la aproximación constructiva a la derivada con la lectura gráfica de la tasa instantánea de variación e identificarla con la pendiente de la recta tangente. Además introduciremos el cálculo de la derivada por aproximación numérica. Las técnicas que usaremos serán la tasa de variación media y la pendiente trigonométrica de la recta tangente a la curva como cociente incremental.

B. SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO.

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Vamos a analizar la propuesta didáctica de la derivada que realiza el libro de texto de primero de Bachillerato Antonio, M. y otros,(2008) de la editorial Santillana. Su autor introduce la derivada de una función en el tema 8 empezando en la portada del tema con un pretexto literario *"La ciudad Rosa y Roja"*, que reproducimos:

"Aquella princesa de largos y dorados cabellos estaba alarmada al observar que cada día muchos se quedaban enredados en su peine. Pero, para su tranquilidad la cuenta se mantenía siempre alrededor de los ciento cincuenta mil cabellos pese a que se le caían unos cincuenta diarios. Por lo que no parecía probable que fuera a perder su dorado atributo.

Llegado el momento de tomar esposo, la princesa declaró que solo se casaría con quien adivinara la longitud de su cabellera. Eran datos sobradamente conocidos el número de sus cabellos y los que perdía diariamente, así con el hecho de que nunca se los cortaba, ya que la augusta melena era uno de los temas de conversación más frecuente en palacio. Así que el astrónomo real, que la ama en silencio, se presentó ante la princesa (que para confundir a sus pretendientes se recogía el pelo en un enorme moño) y dijo:

-Si tenéis ciento cincuenta mil cabellos y se os caen unos cincuenta diarios, dentro de tres mil días se habrán caído todos los que ahora adornan vuestra cabeza (aunque, naturalmente, para entonces tendréis otros ciento cincuenta mil, que os habrán ido saliendo al mismo ritmo que se os caen, puesto que la cuenta diaria demuestra que el número de vuestros cabellos permanece constante). Lógicamente, los últimos en caer serán los que hoy mismo os han salido, lo que equivale a decir que la vida media de un cabello es de tres mil días. Puesto que el cabello humano (incluso el principesco) crece a razón de un centímetro al mes, y tres mil días son cien meses, vuestra cabellera debe medir en su punto de máxima longitud (ya que en realidad tenéis cabellos de todas las medidas) aproximadamente un metro.

La princesa se casó con el astrónomo, que, acostumbrado a contar las estrellas, pasó a ocuparse personalmente del cómputo de los cabellos, uniendo al rigor del científico la solicitud del esposo

Se plantea al alumno la resolución matemática de este enigma literario, que es la siguiente:

Al suponer que la velocidad del crecimiento del cabello es constante 1 cm/mes, la función que relaciona la longitud, en cms del cabello (l) y el tiempo en meses transcurridos (t) es l=t. Si la velocidad de crecimiento fuera de 2 cm/mes, la fórmula sería l =2t. Pero esta velocidad no es siempre constante. Imagina que, por efecto de un crecepelo, la relación entre la longitud y el tiempo viene expresada por la fórmula l =3$\sqrt{t}$. Determina la velocidad de crecimiento entre los meses 2º y 7º, 2º y 6º, 2º y 4º. ¿Es constante?

A continuación presenta lo que hay que recordar en una página doble y el autor cree conveniente presentar vectores paralelos y perpendiculares con su representación gráfica. La pendiente de una recta presentada como la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas. La ecuación de la recta en su forma punto pendiente. La continuidad de una función con su definición por supuesto con el límite. La composición de funciones y por último el crecimiento y decrecimiento de una función con sus valores máximos y mínimos.

La secuencia del libro continua con las definiciones de tasa de variación media y ejemplos, derivada de la función en un punto como límite del cociente incremental, interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisas, ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal todo ello con sus correspondientes ejercicios idénticos de como hallarlos una vez dada la definición o técnica.

A continuación define la función derivada que se asocia a cada punto para continuar con todas las operaciones de funciones derivadas, como suma de funciones, producto por un escalar, producto de un numero por una función, cociente y producto de funciones derivadas. Terminará el tema con las derivadas de funciones elementales dando fórmulas para derivar la función potencial, exponencial y logarítmica.

El libro de texto presenta y ejemplifica técnicas sin que estén acompañadas del discurso tecnológico que las justifique.

Por último el libro nos ofrece las aplicaciones de las derivadas calculando la monotonía de la función usando la función derivada, así como los extremos relativos de la función, además introduce las derivadas sucesivas de la función para acabar con los problemas de optimización y representación de funciones como practica de todo lo enseñado.

Presenta una batería de problemas resueltos dando las técnicas de resolución de cada una de ellas que ha presentado previamente, por ejemplo, "como se calcula la tangentes a una curva que cumplen una serie de condiciones".

El tema acaba con una propuesta muy amplia de, ejercicios y problemas clasificados igual que la teoría dada en el tema y una reflexión final con ideas clave para que queden como conocimiento. En efecto texto propone realizar 127 actividades entre ejercicios y problemas. Sin embargo, prácticamente todas las actividades son ejercicios para enseñar y/o reforzar técnicas. Únicamente en la actividad nº 2, las actividades nº 29 a 33 de optimización, la nº 48, nº 109 y nº 110 plantean problemas contextualizados. El texto propone una enseñanza excesivamente formal en la que los conceptos no se presentan a los alumnos a partir de un trabajo experimental previo. Por desgracia, las propuestas de otras editoriales de fuerte implantación como SM o Anaya siguen el mismo criterio presentando una enseñanza excesivamente formal de la derivada.

2. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

No existe campo de problemas propuesto para enseñar el concepto de derivada en un punto. La práctica habitual de enseñanza consiste en mostrar las técnicas para poder derivar la función en un punto con la tecnología del límite, y las técnicas de derivación de las funciones derivadas apoyadas en la definición mentada anteriormente. A posteriori se enseñan las aplicaciones de la derivada en un punto como la de la función derivada, siendo estas el conocimiento de la monotonía de una función, crecimiento y decrecimiento sin tener muy claro donde puede ser útil este concepto. Y como aplicación estrella de las funciones derivadas quedan los problemas de optimización siendo problemas contextualizados que le aportan un poco de sentido a todo lo estudiado. Los problemas de optimización son el único momento de la enseñanza en la que se muestra alguna aplicación práctica del concepto de derivada.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Los alumnos siguen un aprendizaje memorístico. El aprendizaje memorístico significa aprender y fijar en la memoria distintos conceptos sin entender lo que significan, por lo que no realiza un proceso de significación. Es un tipo de aprendizaje que se lleva a cabo como una acción mecánica y repetitiva. A su vez también realiza un aprendizaje implícito que hace referencia a un tipo de aprendizaje que se constituye en un aprendizaje generalmente no-intencional y donde el aprendiz no es consciente sobre qué se aprende, y el otro tipo de aprendizaje que se da es el que también se conoce como aprendizaje vicario, por imitación o modelado, y se basa en una situación social en la que al menos participan dos individuos: el modelo (la persona de la que se aprende) y el sujeto que realiza la observación de dicha conducta, y la aprende.

Esto implica que el alumno aprende los contenidos de forma pasiva, no descubre ni relaciona y ni reordena los conceptos para adaptarlos a su esquema cognitivo. Lo que nos lleva a las “dificultades para que los jóvenes de estas edades logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el análisis matemático” (Artigue, y otros 1995). Nos expresa que si bien muchos estudiantes pueden aprender a realizar de forma mecánica cálculos de derivadas Llevar primitivas y resolver algunos problemas, se encuentran grandes dificultades para alcanzar una verdadera comprensión de los conceptos involucrados y un desarrollo adecuado de métodos de pensamientos que son el centro de este campo de la matemática.

Un fenómeno educativo de la matemática es el predominio de métodos algebraicos y algorítmicos. Cantoral y Mirón (2000) señalan que esto provoca que una gran cantidad de alumnos no logren dar sentido y significado a los conceptos básicos, de modo que, aun siendo capaces de derivar una función, no pueden reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación.

C. SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO.

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Los estudiantes deben de tener un buen dominio de los conocimientos que relacionamos a continuación, y que son:

- Dibujar la gráfica de funciones polinómicas, racionales y radicales (dominio intersecciones con los ejes, paridad, asíntotas vertical y horizontal, signo de la función)
- Conocer el manejo de algún programa informático de representación gráfica de funciones (caso de usar algún programa que derive, sería interesante alguna sesión previa para enseñar a los estudiantes a usar la pantalla dividida en diversas zonas, una para las expresiones algebraicas y otras para las gráficas).
- Determinar dónde una función es creciente, decreciente o estacionaria observando gráficos y desde un punto de vista global.
- Reconocer, dada la ecuación de una función sencilla, si se trata de una polinómica racional o trascendente y sus características principales.(Azcárate y otros., 1996)
- Además, coincidimos con Azcárate y otros (1996) la necesidad de partir de las concepciones previas que tienen los alumnos acerca de la velocidad o tasa de variación media, utilizar las representaciones gráficas de las funciones para visualizar ideas, en especial la razón de cambio media como pendiente de la recta.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

En el currículo de MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS 4º ESO que establece el Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, podemos encontrar estos conocimientos en el bloque 4 de funciones:

Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.

Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.

Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dada mediante tablas y enunciados.

Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.

Expresiones de la ecuación de la recta. Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.

3 ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Proponemos una tarea para comprobar si los alumnos conocen y saben aplicar los conceptos previos, fundamentalmente la tasa de variación media.

Problema propuesto por Vrancker y otros (2008):

La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por $s(t) = -2t^2 + 8t + 2$ metros, donde el tiempo t se mide en segundos. Realizar la representación gráfica e interpretar en la misma las medidas $t_2 - t_1$ y $s(t_2) - s(t_1)$. Calcular la tasa de variación media entre los intervalos temporales siguientes:

$t=0$ y $t=1$;
$t=1$ y $t=2$;
$t=2$ y $t=3$;
$t=3$ y $t=4$.

Determinar las unidades en que se expresa la tasa de variación media.

¿Qué se puede decir de la velocidad de la piedra en todo su trayecto?

Vrancker y otros (2008) comentan que la resolución de este problema requiere que el alumno traduzca del registro algebraico al numérico y gráfico, además de interpretar lo realizado en el registro coloquial. Se presenta una función definida algebraicamente y se solicita la medición de los cambios y el análisis del comportamiento de los mismos. Con las respuestas, el docente puede indagar las concepciones de los alumnos sobre el movimiento variado.

Esto nos mostrará las habilidades sobre el cálculo algebraico si tienen problemas a la hora de calcular la tasa de variación y las dificultades que se presentan para interpretar y relacionar lo realizado en la tabla con respecto a los cambios y la gráfica, también sabremos con este problema si el que incremento de s representa el cambio de posición y el cociente de incremento de s con incremento de t representa la velocidad de la piedra (la velocidad promedio en el intervalo correspondiente). En la pregunta sobre la velocidad de la piedra en todo su trayecto, se pretendía que observaran que la velocidad no es constante.

En efecto, si calculamos la variación media en los cuatro intervalos que indica el problema podemos constatar que la variación va disminuyendo conforme la variable independiente (tiempo) avanza en el intervalo de 0 a 4 segundos, como puede verse en la siguiente gráfica:

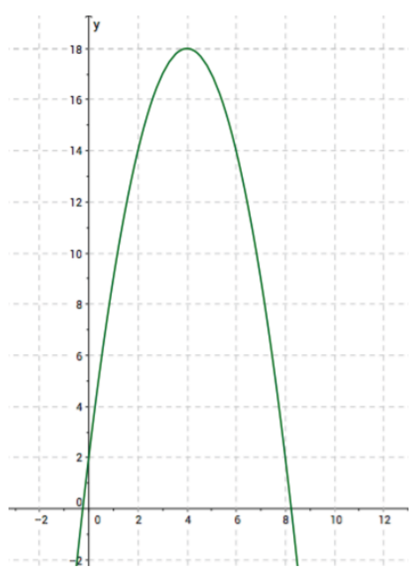


Figura 1: Gráfica de $s(t)=-2t^2+8t+2$

D. SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMATICO.

1. ¿Cuáles es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

Vamos a considerar algunas de las razones históricas que dieron lugar al concepto de derivada como la tasa instantánea de variación de una función a partir de las nociones de la tasa media de variación de una función entre dos puntos, de pendiente de una recta secante y de recta tangente. Concretaremos las razones históricas en el siguiente apartado de esta memoria.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

La derivada es una noción clave en el estudio del Cálculo y ha sido objeto de especial atención desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva (concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos y tipos de errores), instruccionales (estrategias y alternativas para la enseñanza de la derivada), tal y como se muestra en Artigue, Batanero y Kent (2007) y en otras centradas en los profesores y en los conocimientos que debe de tener un profesor sobre esta noción.

También existen investigaciones de corte epistemológico. Una de estas investigaciones particularmente interesante es la realizada desde el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática desarrollada por Godino, Font y Pino-Fan (2011) que pasamos a comentar. En este marco teórico las *configuraciones epistémicas* se componen de los objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas en distintos contextos de uso. Un objeto matemático puede tener varias configuraciones epistémicas las cuales a su vez llevan asociadas un significado parcial distinto para dicho objeto matemático.

Para responder a la pregunta ¿qué debería conocer un profesor para que su enseñanza de las derivadas tenga la mayor idoneidad didáctica posible? Godino , Font y Pino –Fan (2001) reconstruyen el significado global de la derivada, identificando nueve sistemas de prácticas los cuales llevan asociados, cada uno a su vez, una configuración epistémica y constituyen un significado parcial de la derivada. A estas nueve configuraciones, respectivamente asociadas a los sistemas de prácticas, las hemos denominado: 1) *la tangente en la matemática griega (CE1)*; 2) sobre la variación en la edad media (CE2); 3) métodos algebraicos para hallar tangentes (CE3); 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes (CE4); 5) las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos (CE5); 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes (CE6); 7) el cálculo de fluxiones (CE7); 8) el cálculo de diferencias (CE8) y, 9) la derivada como límite (CE9).

Es importante aclarar, que dentro del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático una de las maneras de entender el significado de un concepto es, desde la perspectiva pragmatista, en términos de los sistemas de prácticas en que dicho objeto interviene (significado sistémico). Tales sistemas de prácticas están ligados a tipos de situaciones-problemas, de donde se deriva la posibilidad de distinguir distintos significados cuando se abordan problemas diferentes.

De esta forma, el objeto derivada, a lo largo de su evolución histórica, ha adoptado nueve significados distintos (significados parciales), es decir, el objeto derivada se ha activado implícita o explícitamente en nueve subsistemas de prácticas cada uno de los cuales tiene una configuración asociada de objetos y procesos. Estas nueve configuraciones (descritas en los apartados anteriores), a pesar de ser distintas entre sí, algunas de ellas tienen similitudes, de manera que se pueden relacionar como se ilustra en el esquema de la figura 2 que mostramos a continuación.

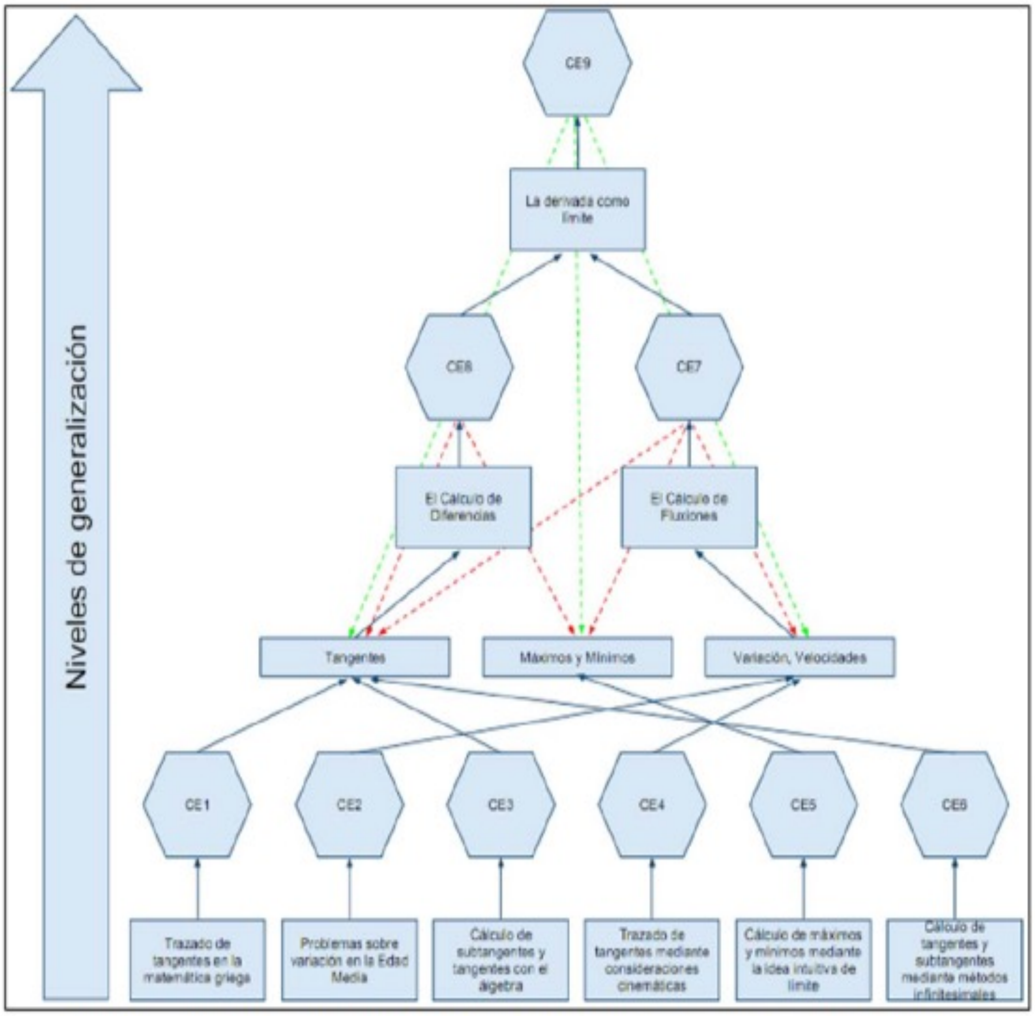


Figura 2. Significado epistémico global de la derivada (Díaz, Font y Pino-Fan, 2011).

Cabe indicar que la mayoría de estos significados se han tenido en cuenta para organizar los campos de problemas de problemas que conforman la propuesta didáctica de este trabajo.

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar

Se propone un problema donde la solución es la derivada de la función pero a través de una función del tipo eapacio-tiempo determinando que podemos calcular con tasas de variación media, la altura en un instante determinado y observando la gráfica de las distintas tasas de variación media en un intervalo muy pequeño. Como se trata de una función espacio-tiempo el primer acercamiento a la idea inicial de derivada vendrá de la mano de la velocidad media en un intervalo cada vez más pequeño para llegar posteriormente a la idea de velocidad instantánea.

PROBLEMA

Una bola es lanzada desde el suelo verticalmente y hacia arriba. La función altura-tiempo es $f(t)=50t-5t^2$.

a) Calcula la tasa de variación media en los intervalos siguientes: [2, 5], [2, 4] y [2, 2,05]
b) ¿Qué velocidad llevara en el instante t=2?

Para obtener esta información vamos a estudiar cómo varía la altura en intervalos que empiezan en $t_0=2$ y tiene amplitudes h cada vez más pequeños. Es decir calculemos las tasas de variación media en los intervalos sucesivos $[t_0,t_0+h]$ tal que h tienda a 0.

Consideremos el intervalo [2,5] con una anchura h=3 segundos

$$\text{TVM}[2,5] = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{45}{3} = 15 \text{ m/s}$$

Pasemos al intervalo [2,4] con una anchura h=2

$$\text{TVM}[2,4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ m/s}$$

Siguiendo esta sucesión podemos considerar una anchura arbitrariamente pequeña, p.e. h=0.05 segundos ¡ 5 centésimas de segundo !. Con lo que la tasa TVM en este intervalo medirá casi la variación instantánea en $t_0=2$ segundos.

$$\text{TVM}[2;\ 2{,}05] = \frac{f(2{,}05) - f(2)}{2{,}05 - 2} = \frac{1{,}48}{0{,}05} = 29{,}74 \text{ m/s}$$

Para conocer la variación instantánea en $t_0=2$ segundos tenemos que calcular la variación media (TVM) correspondiente a un intervalo [2,2+h] tendiendo h a cero.
La sucesión de las TVM tiene como límite la variación instantánea en $t_0=2$ segundos cuyo valor es:

f ' (2) = 30 m/s

El objetivo del problema es calcular la variación instantánea, es decir, la derivada de la función en el punto t=2, que es la velocidad instantánea acercándonos como tasa de variación media, cuando se conoce la función.

A continuación mostramos la solución de este problema utilizando Geogebra:

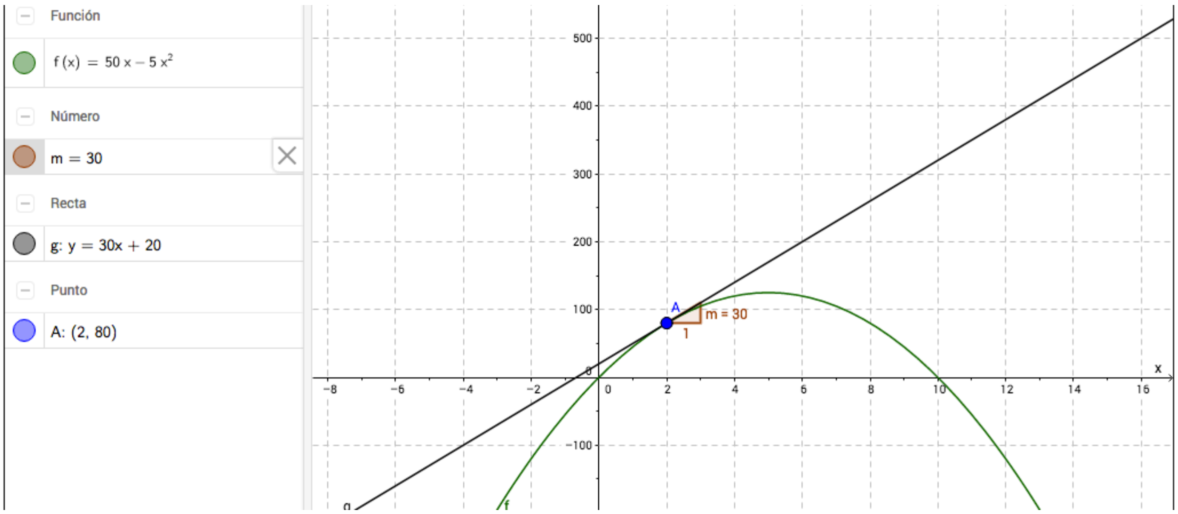


Figura 3: Grafica altura -tiempo

4. Indica la metodología a seguir en la implementación de aula.

Se plantea el problema en clase para resolverlo en grupos de cuatro alumnos para que ellos intenten llegar a conclusiones del tipo como hacer el cálculo de la variación media y poder relacionar éste con la velocidad durante el recorrido. La velocidad instantánea la calcularan usando ordenadores con programas tipo Geogebra. En este momento el profesor no mencionará que se trata la derivada de la función en un punto, será la conclusión el nombrar la velocidad instantánea" derivada".

E. SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS

E. 1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Proponemos cinco campos de problemas, a saber:

1. CONCEPTOS DE PRECÁLCULO: TASA DE VARIACIÓN

Trabajaremos con funciones que modelizan variaciones ya sea con respecto al tiempo (interpretación cinemática de la derivada) y en general tasa de variación media (fenómenos que organizan las funciones que no dependen del tiempo).

2. INTERPRETACION GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Se introduce la derivada de una función en un punto como tangente de una función en ese punto.

3. APROXIMACIÓN NUMÉRICA AL CÁLCULO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

4. CÁLCULO ALGEBRAICO DE LA DERIVADA EN UN PUNTO Y DE LA FUNCIÓN DERIVADA

5. RELACIÓN ENTRE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN Y SU FUNCIÓN DERIVADA.

Comenzamos a describir los problemas de cada campo, siguiendo el orden de presentación.

1. CONCEPTOS DE PRECÁLCULO: TASA DE VARIACIÓN

En este campo se incluyen tres problemas. En el primero utilizamos la representación gráfica de una función para introducir la tasa de variación media. En el segundo problema trabajamos el concepto de tasa de variación media de una función que modeliza un fenómeno que no depende del tiempo y que se presenta a los alumnos de modo verbal. Finalmente, en el tercer problema trabajamos el concepto de tasa de variación media de una función espacio-tiempo, es decir, que trabaja la velocidad media. La particularidad de este problema es que la función espacio-tiempo se presenta de forma tabular, de modo que la estimación de cálculo de la velocidad instantánea obliga al alumno a elegir un intervalo temporal para realizar la estimación.

1.1 DEFINICIÓN DE LA TASA DE VARIACIÓN DE UNA FUNCION CONOCIDA SU REPRESENTACION GRÁFICA

PROBLEMA 1 (Grupo Zero, citado por Azcárate y otros, 1996)

En el gráfico de la figura 4 obtenido en un observatorio meteorológico podemos observar que la variación de la presión atmosférica entre las 0h y las 6h ha sido de -20mb. Durante este intervalo de tiempo (de 6 horas) la variación por hora ha sido de -20/6=-3,3mb/h*,* Esto significa que a las 6h de la mañana el observatorio podía predecir el empeoramiento del tiempo.

a) Calcula la variación por hora de la presión atmosférica entre las 6h y las 12h entre las 12h y las 18h, y entre las 18h y las 24h.

b) A partir de la variación por hora de la presión atmosférica entre las 18h y las 24h ¿Qué pronóstico podrá hacer el observatorio?

c) A la variación por hora de la presión atmosférica la podemos llamar tasa media de variación de la presión atmosférica. Si suponemos que a cada hora t le corresponde una presión P(t), escribe la expresión de la tasa media de variación de la función P entre dos horas t_1 y t_2

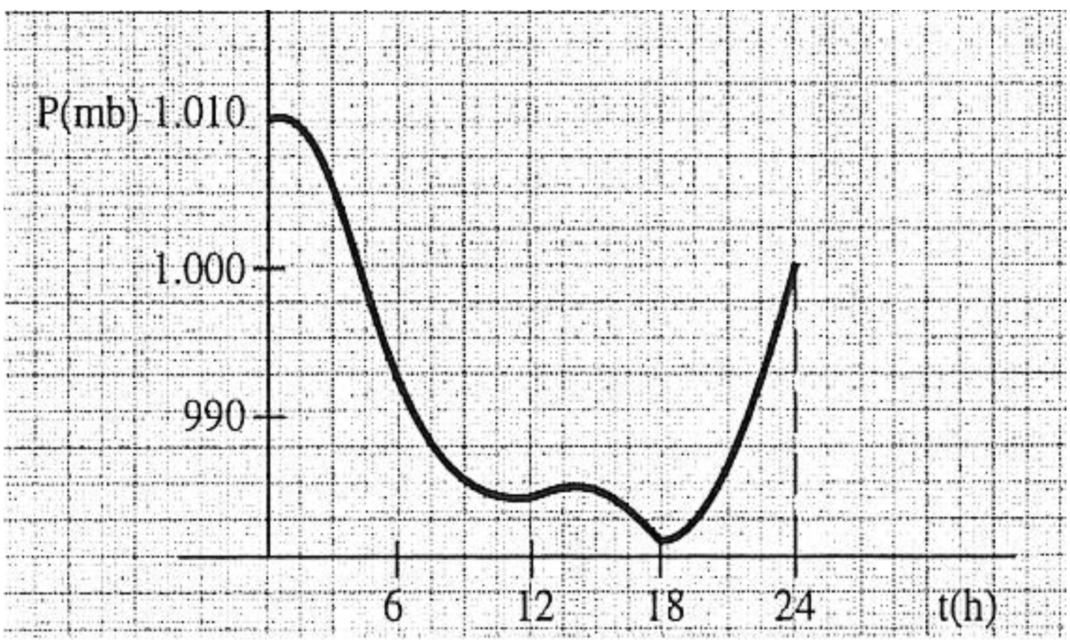


Figura 4. Grafica presión atmosférica -tiempo

Justificación y solución:

La predicción meteorológica del tiempo no se fundamenta en la presión en un momento dado, la medida de la variación de la presión atmosférica entre dos instantes no es más que la diferencia entre las lecturas de la presión hechas en un instante y en otro. Al resolver el apartado a) el alumno comprende que lo interesante para predecir el tiempo no es la variación de presión que ha habido, sino en cuanto tiempo ha tenido lugar esa variación ya que con el dato inicial del cambio de presión atmosférica en seis horas no puede predecir el tiempo, por tanto no es suficiente conocer la variación de la presión atmosférica para predecir el tiempo sino que es necesario conocer la variación media por hora de la presión atmosférica (TVM) para predecir el tiempo.

a) Como el problema nos pide la tasa de variación por hora y nos los solicita en la misma diferencia de horas 6, calculamos la tasa de variación media fijándonos en los valores de la gráfica dada, valor en el instante t=0h la presión es 1010mb, en t=6h la presión es 990mb, en t=12h el valor de la presión es 983,75mb en t=18h es de 981,75mb y en t=24h son 1000mb.

Las tasas de variación son:

TVM [6, 12] = (984-990)/6 = -1 mb/h

TVM [12, 18] = (981-984)/6 = - 0,5 mb/h

TVM [18, 24] = (1000-981)/6 = 3,17 mb/h

b) Podemos predecir por los resultados obtenidos por hora que el tiempo mejorará ya que los datos nos indican que pasamos de la presión por hora negativa que es mal tiempo a una positiva que es buen tiempo.

c) La representación simbólica de la tasa de variación media es $\dfrac{P(t_2)-P(t_1)}{t_2-t_1}$

1.2. TASA DE VARIACIÓN MEDIA EN FENÓMENOS QUE NO DEPENDEN DEL TIEMPO.

PROBLEMA 2 (Azcárate y otros. 1996)

Un depósito de agua tiene forma cilíndrica con unas dimensiones de 1 metro de radio y 4 de altura.

a) Haz la gráfica de la función que nos da el volumen de agua en función de la altura del líquido.

b) Calcula la tasa media de aumento de volumen en litros por centímetro de altura del líquido cuando el nivel sube de 2 a 2,5m. ¿Cuánto vale la tasa media entre dos niveles cualesquiera?

Justificación y solución:

En este problema lo primero es necesario saber la fórmula del volumen de un cilindro, área de la base ($A = \pi r^2$) por la altura $V(h)= \pi r^2 h$, dado que el radio del circulo 1 y la altura 4 como la función volumen es lineal es muy sencilla de representar gráficamente, lo cual nos da mucha información sobre el resultado del problema, dándonos cuenta que es constante la variación del nivel del agua y así concluir que la tasa de variación media va a ser siempre igual. Con esto nos pone de manifiesto la relación que hay entre las funciones polinómicas y la tasa de variación media.

$V(x) = \pi$ x, siendo x la altura y que toma valores entre 0 y 4 metros

En segundo lugar procedemos a dibujar la gráfica de esta función (figura 5) que mostramos a continuación.

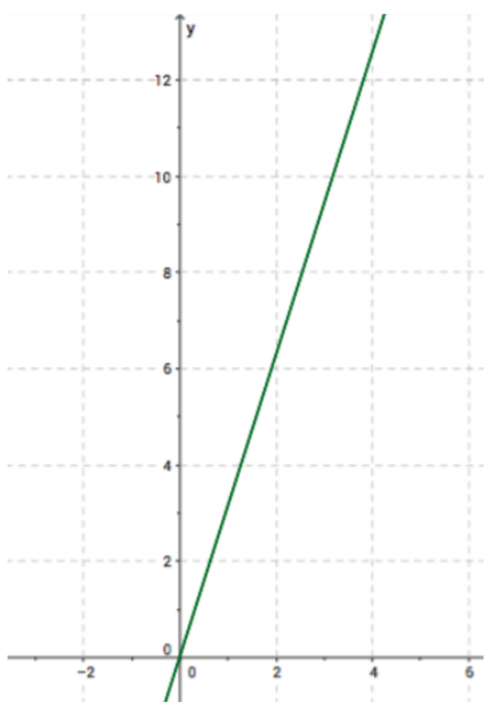


Figura 5: Gráfica volumen -altura del agua en el depósito

La función que representamos es V (x)=πx. Como se ha comentado con la gráfica vemos que la relación entre el volumen y la variable es constante así ya podemos asegurar que la tasa de variación media va a ser constante.

b) Para calcular la tasa de variación media sustituimos en la función volumen los valores 2 y 2,5 y nos queda TVM [2, 2,5]=$\frac{(2,5\pi-2\pi)}{2,5-2}$ =πm^3/m hacemos el cambio de unidades para interpretar el resultado y nos queda 10π litros por centímetro.

1.3. CONCEPTO DE VELOCIDAD MEDIA.

PROBLEMA 3 (Azcárate y otros. 1996)

A intervalos de 5 segundos se observa la posición de un coche (respecto a un punto de referencia 0) con el fin de observar si en algún momento supera la velocidad máxima permitida. Los datos obtenidos, considerando que el instante en que pasa por el punto 0 en el instante cero, son:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia al punto 0 (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocidad media del coche durante el intervalo total de tiempo (40s) y la velocidad media del coche en cada uno de los intervalos de 5 segundos.

b) Haz una estimación de la velocidad del coche en el momento en que el cronómetro indica 20 segundos.

c) Estima durante cuánto tiempo la velocidad fue inferior a 18 m/s. ¿Si la velocidad máxima autorizada es de 72 km/h, ha habido algún momento en que fuese superada?

Justificación y solución:

En los problemas anteriores ya se ha introducido la tasa de variación media de una función, tanto desde su gráfica como dando la expresión de la función algebraicamente. En este problema lo haremos mediante tabla de valores de la funciones espacio-tiempo, vamos directamente a fijar el cálculo de velocidad media coincidiendo con el concepto de tasa de variación media. La velocidad media constituye el punto de vista cinemático del concepto de tasa de variación media.

a) Velocidad media del coche en la totalidad en el tiempo del recorrido, tomamos de la tabla el valor en de la distancia en metros a los 0 segundos (0m) y a los 40 segundos (720m);

TVM en [0, 40] $= \frac{\mathbf{720-0}}{\mathbf{40-0}} = 18$m/s.

Para calcular la velocidad media cada 5 segundos es suficiente con tomar los valores de la tabla de la distancia en cada tramo ya que los intervalos de tiempo son iguales.

Seguimos calculando por los tramos siguientes:

TVM en [0, 5] $=\frac{100-0}{5-0} = 20$ m/s

TVM en [5, 10] $=\frac{200-100}{10-5} = 20$ m/s

TVM en [10, 15] $= \frac{290-200}{15-10} =18$ m/s

TVM en [15, 20] $= \frac{370-290}{20-15} =16$ m/s

TVM en [20, 25] $= \frac{430-370}{25-20} =12$ m/s

TVM en [25, 30] $= \frac{510-430}{30-25} =16$ m/s

TVM en [30, 35] $=\frac{610-510}{35-30} = 20$ m/s

TVM en [35, 40] $=\frac{720-610}{40-35} = 22$ m/s

b) Parece razonable la estimación de la velocidad en el instante 20 segundos se realice a partir de la tasa de variación media en el intervalo [15,25],

TVM [15,25]$= \frac{430-290}{25-15} = 14$ m/s.

c) La velocidad fue inferior a 18 m/s en el intervalo temporal de 15 a 30 segundos.

Dado que 72 Km/h = 20 m/s, el coche superó esta velocidad en el intervalo temporal de 35 a 40 segundos.

2. INTERPRETACION GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

TANGENTE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

PROBLEMA 4.

Dos trenes parten de la misma ciudad por dos vías diferentes uno de ellos recorre la vía lenta por la que va tren de mercancías cuyo recorrido en kilómetros lo describe la función $f(x)=x$ mientras que el otro tren recorrerá la vía de recorrido descrita por la función $g(x)=x^2/10$

El tiempo del recorrido de los trenes será expresado en minutos.

a) Representar las gráficas espacio- tiempo de ambos trenes.

b) ¿Cuántos km han recorrido los trenes después de 10 min, 20 min y 30 min?, ¿hay mucha diferencia entre la distancia que recorre cada tren?

c) Calcular la velocidad media de los trenes en los 10 primeros minutos, entre los 10 y 20 minutos y entre los minutos 20 y 30 minutos.

d) ¿Cuál es la velocidad de cada tren en el instante 10 minutos? ¿Y en el instante 5 minutos?

e) Dibujar las rectas tangentes a la función g(x) en los instantes 5 min y 10 min.

Calcular las pendientes, como la tangente trigonométrica del ángulo que forman la recta y el eje de abscisas.

Justificación y solución:

El empleo de la tasa de variación en un intervalo [a,b] para estudiar pendientes y velocidades medias es insuficiente por eso vamos a considerar los intervalos cada vez más pequeños como se refleja en el problema anterior. Para acercarnos a la derivada como pendiente de la tangente a la curva lo haremos con funciones polinómicas sencillas la primera una recta (su pendiente tiene un incremento fijo) y la segunda una función polinómica de segundo grado que tiene partes rectas.

a) La gráfica nos muestra la representación del movimiento de los dos trenes gracias a la expresión analítica de las funciones.

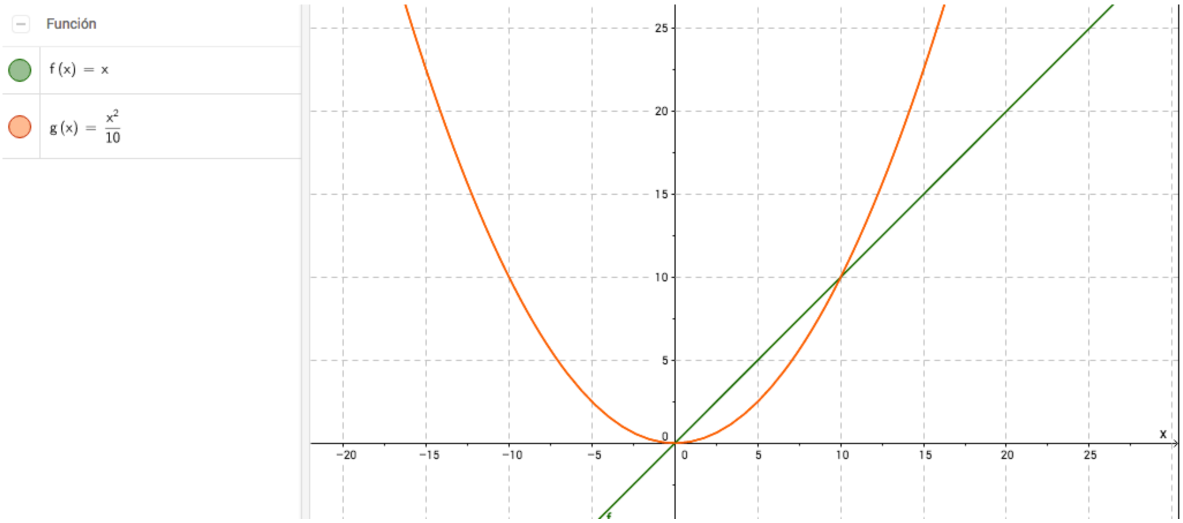


Figura 6: Gráficas espacio-tiempo de ambas funciones

b) Con la expresión de las funciones analíticas dadas calculamos con facilidad lo que avanzan los trenes en los minutos requeridos:

Tren 1 f (10)=10km; f (20)=20km; f (30)=30km:

Tren 2 g (10)=10km; g (20)=40km; g (30)=90km;

Podemos observar en los resultados que a los 10 primeros minutos recorren los mismos metros pero en los siguientes tramos el tren 2 recorre más metros que el tren 1 en el mismo intervalo de tiempo.

a) Para calcular la velocidad media de los trenes lo haremos con la tasa de variación media.

Tren 1: TVM [0,10]= $\frac{10-0}{10-0}$ =1km/min

TVM [20,10]=$\frac{20-10}{20-10}$ =1km/min

TVM [30,20]=$\frac{30-20}{30-20}$ =1km/min

Tren 2: TVM [0,10]= $\frac{10-0}{10-0}$ = 1km/min

TVM [10,20]= $\frac{40-10}{20-10}$ =3km/min

TVM [20,30]= $\frac{90-40}{30-20}$ =5km/min

Sacamos la conclusión que el primer tren lleva velocidad constante recorriendo siempre la misma distancia kilométrica en el mismo tiempo mientras que el tren 2 va aumentando su velocidad media en cada tramo de igual tiempo.

d) Al calcular la velocidad de los trenes en los instantes t=10min y t=5min, en el caso del primer tren podemos deducir que como la relación espacio tiempo es lineal y la velocidad es constante como hemos visto en el apartado anterior, la velocidad media en cualquier intervalo es igual a la velocidad instantánea en cualquier momento luego 1km/min. En el caso del tren 2 no queda otra que calcular la tasa de variación media en intervalos de tiempo cada vez más pequeños próximos a 10 y 5 min.

TVM [9,99, 10,01]=$\frac{25{,}10-24{,}90}{0{,}02}$=1km/min

TVM [4,99, 5,01]=$\frac{100{,}20-99{,}80}{0{,}02}$=2km/min

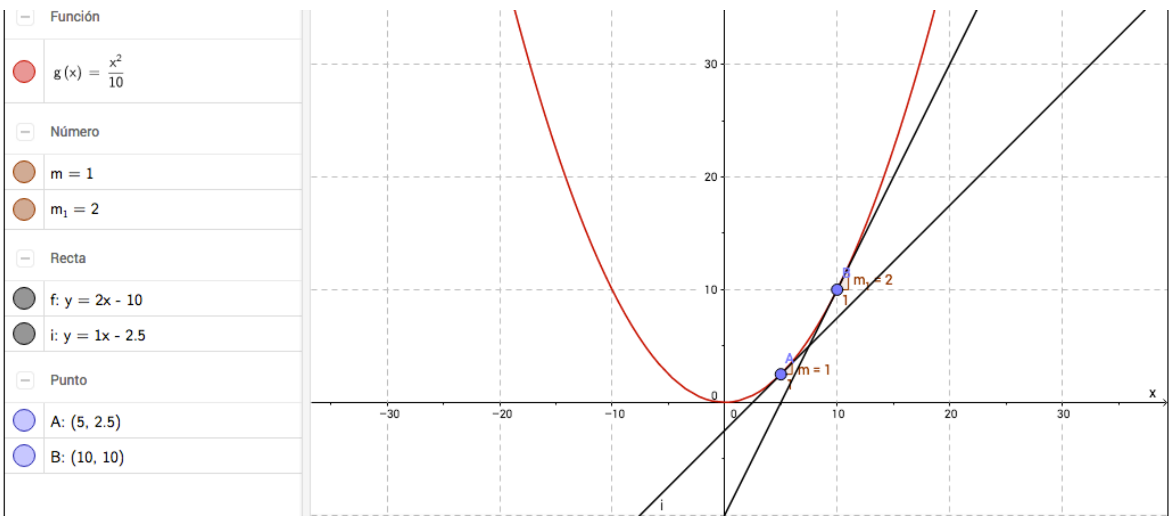


Figura 7: Grafica TVM como pendientes de la rectas.

En este momento se puede realizar una introducción no formal de la derivada de una función en un punto desde dos perspectivas: como límite de tasas de variación media y como pendiente de la tangente a la función en ese punto.

En estos dos primeros campos problemas hemos introducido la tasa instantánea de variación o derivada de la función en el punto que aparece como límite de la tasa de variación media:

$$\text{TVM } [a, a+h] = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Donde a es el punto en el que queremos conocer la variación instantánea de la función y h un intervalo “suficientemente pequeño” entorno a él.

Además, la derivada adopta un nuevo significado, en este caso geométrico. En este momento podemos institucionalizar la derivada en un punto como el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto, entendiendo la pendiente como la tangente trigonométrica del ángulo que forman la recta tangente y el eje positivo de abscisas.

3. APROXIMACIÓN NUMÉRICA AL CÁLCULO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una vez que en los dos primeros campos de problemas hemos introducido la derivada como tasa de variaciones medias, antes de ir la definición formal que requiere del concepto de límite y que sabemos que plantea dificultades a los alumnos, proponemos plantear al menos un problema en el que los alumnos realicen un acercamiento a la idea de formal de derivada como límite realizando cálculos en un contexto gráfico y numérico. Para ello proponemos el siguiente problema.

PROBLEMA 5 (Azcárate y otros. 1996)

Queremos calcular la pendiente de la recta tangente al grafico de la función $f(x)=x^2$ en el punto de abscisa x=1. Para ello entregamos a cada alumno una hoja de papel milimetrado y les damos la siguiente consigna:

a) Dibuja la gráfica de la función en el intervalo [0, 1,5]. Hazlo en papel milimetrado y escoge la misma unidad para los dos ejes de manera que una unidad sea de 10cm, procurando hacer la gráfica con la máxima precisión en el entorno del punto de abscisa 1.

b) Traza aproximadamente la recta tangente y calcula su pendiente. Compara el resultado con el obtenido por tus compañeros ya que al hacerlo en papel no es tan exacto como usar un ordenador. ¿Es posible calcular el valor exacto de la pendiente de la tangente? ¿Cuántos puntos de una recta se necesitan para determinar su dirección y por lo tanto para calcular su pendiente? Y en cambio, ¿Cuántos puntos de la recta tangente conoces con total precisión?

c) Calcula la pendiente de la recta que corta a la gráfica (recta secante) en los puntos de abscisa 1 y 1,5. Hazlo con toda precisión utilizando las coordenadas de los dos puntos obtenidos mediante la fórmula de la función.
d) Pon el resultado obtenido en el apartado anterior en el lugar que le corresponda en la tabla siguiente. Completa las tablas haciendo lo mismos para otras rectas secantes de modo que todas corten la curva en dos puntos: uno común a todas ellas, el punto de abscisa 1, y el otro, un punto de abscisa x cercano a 1.

x	*1,5*	*1,1*	*1,01*	*1,001*	*1,0001*
f(x)					
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

x	*0,5*	*0,9*	*0.99*	*0,999*	*0,9999*
f(x)					
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

e) Observa las sucesiones de números de la última fila de las tablas: ¿hacia qué número tienden estas sucesiones? ¿Cuál crees que es el valor exacto de la pendiente de la recta tangente?
Justificación y solución:
Con este problema tratamos de introducir la gran dificultad de los conceptos locales en contraposición a la facilidad de la visión global de una función, como hemos visto en los problemas anteriores hemos utilizado los cálculos de tasa de variación, tasa de variación media, velocidad media y pendiente de una recta. Supone una aproximación de forma intuitiva al concepto de derivada en un punto, por tanto se trata de realizar un paso al límite sin expresarlo de forma explícita, a partir de la pendiente de una curva, utilizando el medidor de pendientes.

Los alumnos reconocerán este procedimiento de cálculo de enseñanzas anteriores entendiendo que el cálculo de la derivada en un punto se relaciona con el límite en un punto de la tasa de variación media.

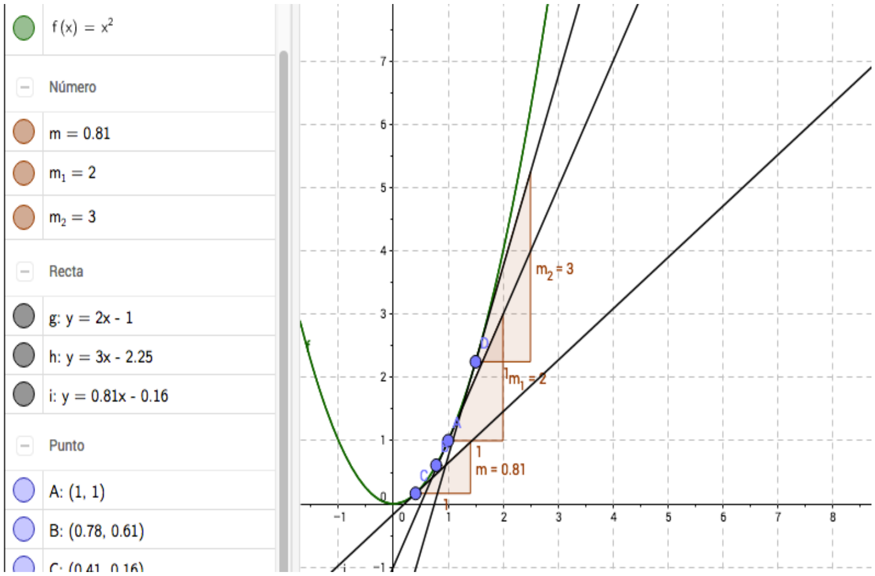


Figura 8: sucesivas aproximaciones de la TVM en intervalos próximos a la abscisa x=1

c) Para calcular pendiente de la recta secante en los puntos de abscisa 1 y 1,5 primero hallamos sus ordenadas sustituyendo en la función $f(x)=x^2$, f(1)=1, f(1,5)=2,25 la pendiente de la recta es

$$\frac{2{,}25-1}{1{,}5-1}=2{,}5$$

d)

x	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
f(x)	2,25	1.21	1,02	1,002	1,0002
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$	2,5	2,1	2	2	2

x	0,5	0,9	0.99	0,999	0,9999
f(x)	0,25	0,81	0,9801	0,998	0,9998
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$	1,5	1,9	1,99	2	2

e) Observando los resultado de las tablas vemos como la sucesión de números se aproxima a 2 siendo este el valor de pendiente de la recta Tangente por tanto la ecuación de la recta tangente es y=2x-1.

4. CALCULO ALGEBRAICO DE LA DERIVADA EN UN PUNTO Y DE LA FUNCION DERIVADA.

PROBLEMA 6 (Azcárate y otros, 1996)

En el cálculo de la derivada de la función en un determinado punto $f(x)=x^2$ has tenido que calcular las pendientes de las rectas secantes mediante la expresión $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ para diferentes valores de x.

a) Si en esta expresión sustituyes f(x) por x^2 y f (1) por su imagen obtendrás un cociente de dos polinomios. Haz la división de los dos polinomios.

b) Utiliza la expresión obtenida para comprobar si los valores de las tablas del ejercicio anterior son correctas.

c) A partir de la expresión simplificada obtenida en el apartado a) ¿sabrías calcular la pendiente de la tangente de una forma inmediata, sin necesidad de calcular sus aproximaciones?

d) Utiliza el procedimiento propuesto en este ejercicio para hallar la pendiente de la recta tangente al gráfico de la misma función f en el punto de abscisa 3.

Justificación y solución:

Otra manera de visualizar el cálculo de la derivada de función en un punto es realizando como es cociente incremental como una división de polinomios, algoritmo aprendido por los alumnos en los primeros cursos de E.S.O.

a)b)Hacemos la división propuesta $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$y comprobamos los valores de la tabla

1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999

que al sustituirlos en x+1 nos da exactamente los mismos valores que en la formula $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

c) Se ha descrito el cociente incrementa como una división de polinomios, una vez resuelta, sustituyendo en el punto se halla la pendiente de la recta tangente.

d) Hacemos la división del polinomio $\frac{(x^2-9)}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$ sustituimos el punto de abscisa 3 en la ecuación x+3 así tenemos que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa 3 es 9.

Este es el momento de institucionalizar el cálculo de la función derivada de una función

La derivada de una función en un punto x =a vendrá dada por:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En este momento se propondrá a los alumnos la obtención de la función derivada de una función constante, de una función lineal, de una función cuadrática, de una función racional y de una función radical muy elemental para introducirles en el cálculo de derivadas inmediatas.

PROBLEMA 7 (Grupo Cero, 1977,p.74)

Imagina que desde un punto 0, que se toma como origen del sistema de referencia, se suelta un avión de juguete impulsado con gomas, y que la curva descrita en su trayectoria viene dada por $f(x) = 1{,}6x - 0{,}08x^2$

a) Calcula la función derivada.

b) Representa ambas funciones.

c) Estudia la relación entre ambas

d) ¿cómo sabes si estas subiendo o bajando a los 5m, del punto de lanzamiento medidos sobre la horizontal?

e) ¿y a los 12m?

f) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento entre 0 y 20 segundos.

Justificación y solución:

En los problemas anteriores hemos calculado la derivada de la función en un punto, calculando la tasa de variación media, como pendiente de la recta tangente en el punto y resolviendo esa pendiente como cociente de polinomios. Luego haciendo corresponder a cada punto la derivada de la función en el punto hallado, podemos construir para cada función f una función f' llamada función derivada de la función f. Representar la función y su función derivada es la manera que los alumnos profundicen en el conocimiento conceptual de derivada porque permite relacionar el crecimiento o decrecimiento de una función con el valor positivo o negativo de su función derivada. Describir crecimiento o decrecimiento de las funciones relacionando con sus funciones derivadas si estas son positivas o negativas.

a) Calculamos la función derivada haciendo el

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$

$\lim_{h\to 0}\frac{[1{,}6(x+h)-0{,}08(x+h)^2]-[1{,}6x-0{,}08x^2]}{h} =$

$\lim_{h\to 0}\frac{1{,}6x+1{,}6h-0{,}08x^2-0{,}08h^2-0{,}16xh-1{,}6x+0{,}08x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(1{,}6-0{,}08h-0{,}16x) = 1{,}6-0{,}16x.$

Así tenemos f'(x)=1,6-0,16x.

b)c) Como a continuación podemos observar en la figura 8, las gráficas se aprecia que la función derivada de una función cuadrática es lineal, además vemos que cuando la función es creciente (la parábola) su función derivada es positiva y cuando la función decrece su función derivada es menos que cero y justo en el punto donde la función f pasa de ser creciente a decreciente su función derivada es cero.

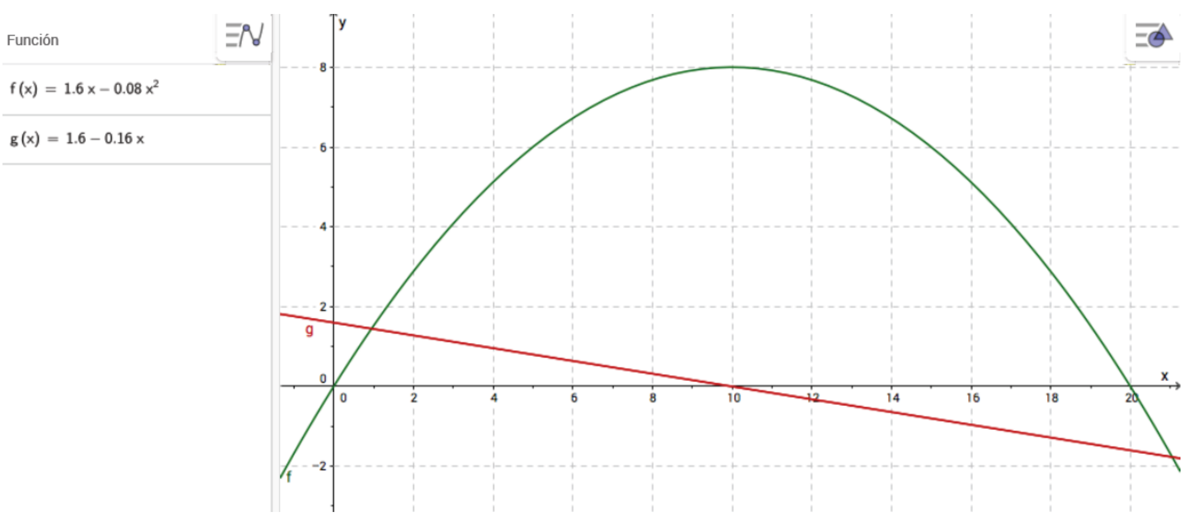


Figura 9: Graficas de la función y de su función derivada

d)e) Como la curva de la trayectoria es una parábola se ve bien claro que corta al los ejes en el (0,0) y en el (20,0) y su vértice es el punto (10,8) vemos claramente que el avión esta subiendo a los 5 metros y bajando a los 12 metros.
f) Entre los 0 y los 20 segundos vemos con claridad que la función crece hasta su vértice que está a los 10 segundos y decrece de los 10 a los 20 segundos.

PROBLEMA 8 (Grupo Cero ,1977)
Cierto gas mantenido a una presión de 5 Nw/m^2 ocupa un volumen de 2 m^3. En estas condiciones, según la ley de Boyle, a cada presión ejercida sobre este gas corresponde un volumen dado por V (p)=$\frac{10}{p}$
a) Calcula la derivada o tasa instantánea del volumen cuando la presión es de 10 pascales (Pa) 10 Nw/m^2 aplicando la definición de derivada como límite de incrementos.
b) Calcula la derivada o tasa de variación instantánea del volumen cuando la presión es de 20 Nw/m^2 aplicando la definición de derivada como límite de incrementos.
c) Encuentra mediante un procedimiento algebraico la función derivada la función volumen.
d) Representa gráficamente las funciones V (p) y V' (p) y explica la relación entre ambas gráficas.
Justificación y solución:
a)

$$\lim_{h\to 0}\frac{V(10+h)-V(10)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{10}{10+h}-\frac{10}{10}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10-10-h}{h(10+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{10+h}=\frac{-1}{10}\frac{m^3}{Pa}$$

b)

$$\lim_{h\to 0}\frac{V(20+h)-V(20)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{10}{20+h}-\frac{10}{20}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10-0'5(20+h)}{h(20+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h}{2}}{(20+h)h}$$

$$=\frac{-1}{40}\frac{m^3}{Pa}$$

c)

V (p)=$\frac{10}{p}$=10p^{-1}

$$\lim_{h\to 0}\frac{V(p+h)-V(p)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{10}{p+h}-\frac{10}{p}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10p-10p-10h}{h(p+h)p}=\lim_{h\to 0}\frac{-10}{(p+h)p}=\frac{-10}{p^2}$$

d) Como se puede ver en las gráficas ambas funciones son de proporcionalidad inversa y el volumen que obedece la ley de Boyle solo es la rama positiva puesto que no tenemos volúmenes negativos

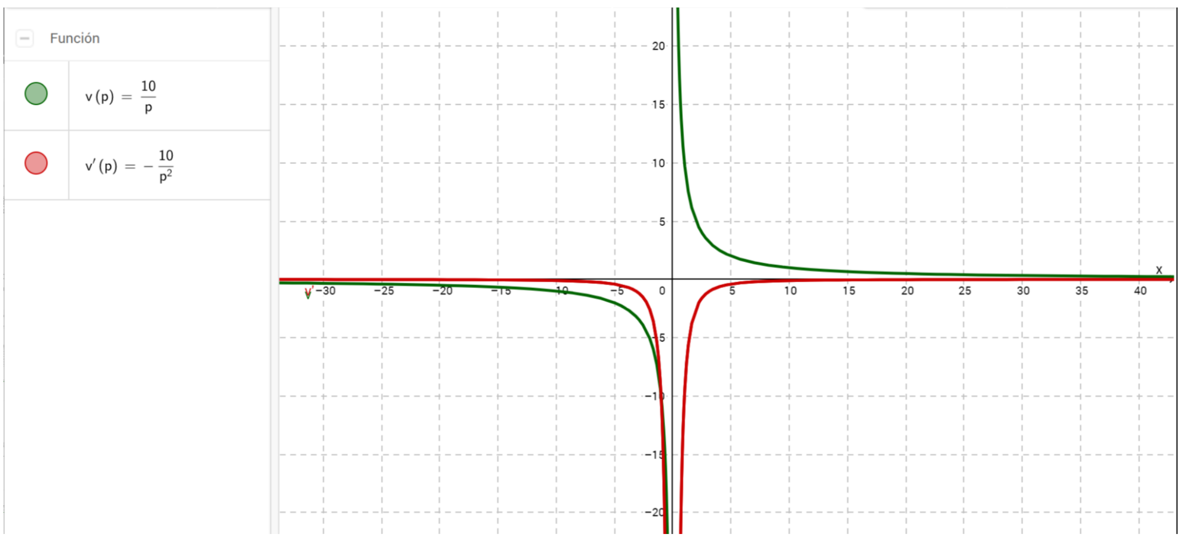


Figura 10: Graficas de la función volumen y su función derivada.

PROBLEMA 9 (Grupo Cero, 1977)

Se están haciendo pruebas sobre la rapidez con la que líquidos de distintas viscosidades se extienden sobre una superficie pulimentada. Para ello se depositan gotas de 1 cm. De diámetro y se estudia la rapidez con que se extienden. Para un cierto líquido, el radio r, en cm, a los t segundos de haber depositado las gotas viene dado por: r (t)=$2\sqrt{t}+\frac{1}{2}$

a) Calcula la derivada o tasa de variación instantánea del radio en el instante t=1 aplicando la definición de derivada como límite de incrementos.

b) Calcula la derivada o tasa de variación instantánea del radio en el instante t=25 aplicando la definición de derivada como límite de incrementos.

c) Calcula la derivada o tasa de variación instantánea del radio en el instante t=100 aplicando la definición de derivada como límite de incrementos.

d) Encuentra mediante un procedimiento algebraico la función derivada de la función radio.

e) Representa gráficamente las funciones r (t) y r' (t) y explica la relación entre ambas gráficas.

Justificación y solución:

a)

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(1+h)-r(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sqrt{1+h}+\frac{1}{2}-(2\sqrt{1}+\frac{1}{2})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4\sqrt{1+h}+1-4-1}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sqrt{1+h}-2}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2(\sqrt{1+h}-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h-1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}=1\frac{cms}{seg};$$

b)

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(25+h)-r(25)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sqrt{25+h}+\frac{1}{2}-(2\sqrt{25}+\frac{1}{2})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4\sqrt{25+h}+1-20-1}{2h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sqrt{25+h}-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(25+h-25)}{h\sqrt{25+h}+5}=\frac{1}{5}\frac{cms}{seg};$$

c)

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(100+h)-r(100)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sqrt{100+h}+\frac{1}{2}-(2\sqrt{100}+\frac{1}{2})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4\sqrt{100+h}+1-40-1}{2h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sqrt{100+h}-10}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(100+h-100)}{h\sqrt{100+h}+10}=\frac{1}{10}\frac{cms}{seg};$$

d)

r(t)=$2\sqrt{t}+\frac{1}{2}$

r'(t)=

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sqrt{t+h}+\frac{1}{2}-(2\sqrt{t}+\frac{1}{2})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4\sqrt{t+h}+1-4\sqrt{t}-1}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(\sqrt{t+h}-\sqrt{t})}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2(t+h-t)}{h(\sqrt{t+h}+\sqrt{t})}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{t+h}+\sqrt{t}}=\frac{1}{\sqrt{t}};$$

e) Las gráficas de la función y su función derivada podemos observar que la función rapidez es un trozo de la parábola que parte en ½ y crece de manera exponencial y su función derivada es decreciente cuanto mas crece la rapidez.

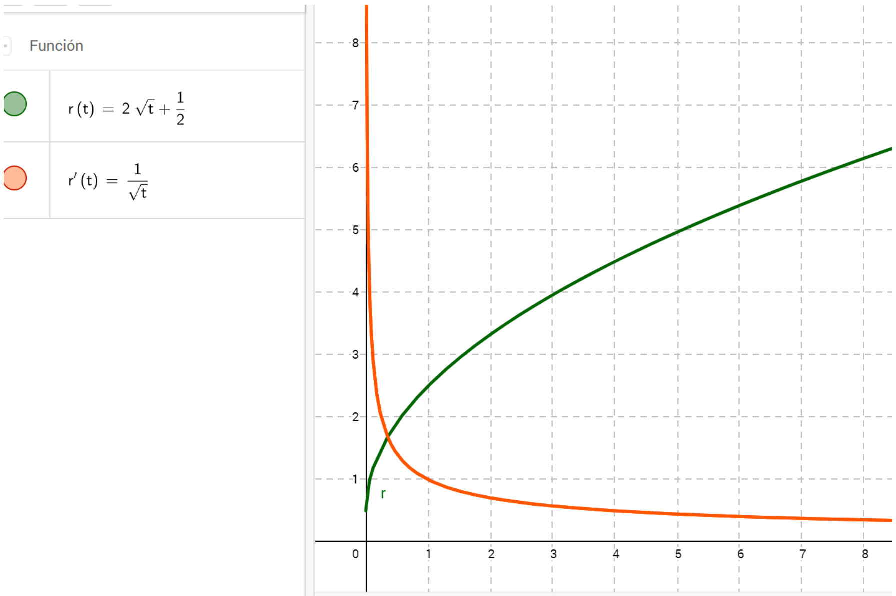


Figura 11: Graficas de la función rapidez y su función derivada

5. RELACION ENTRE LA REPRESENTACION GRAFICA DE UNA FUNCION Y SU FUNCION DERIVADA

PROBLEMA 10 (Gómez, 2013)

Relaciona cada una de las siguientes funciones con la representación gráfica de su función derivada:

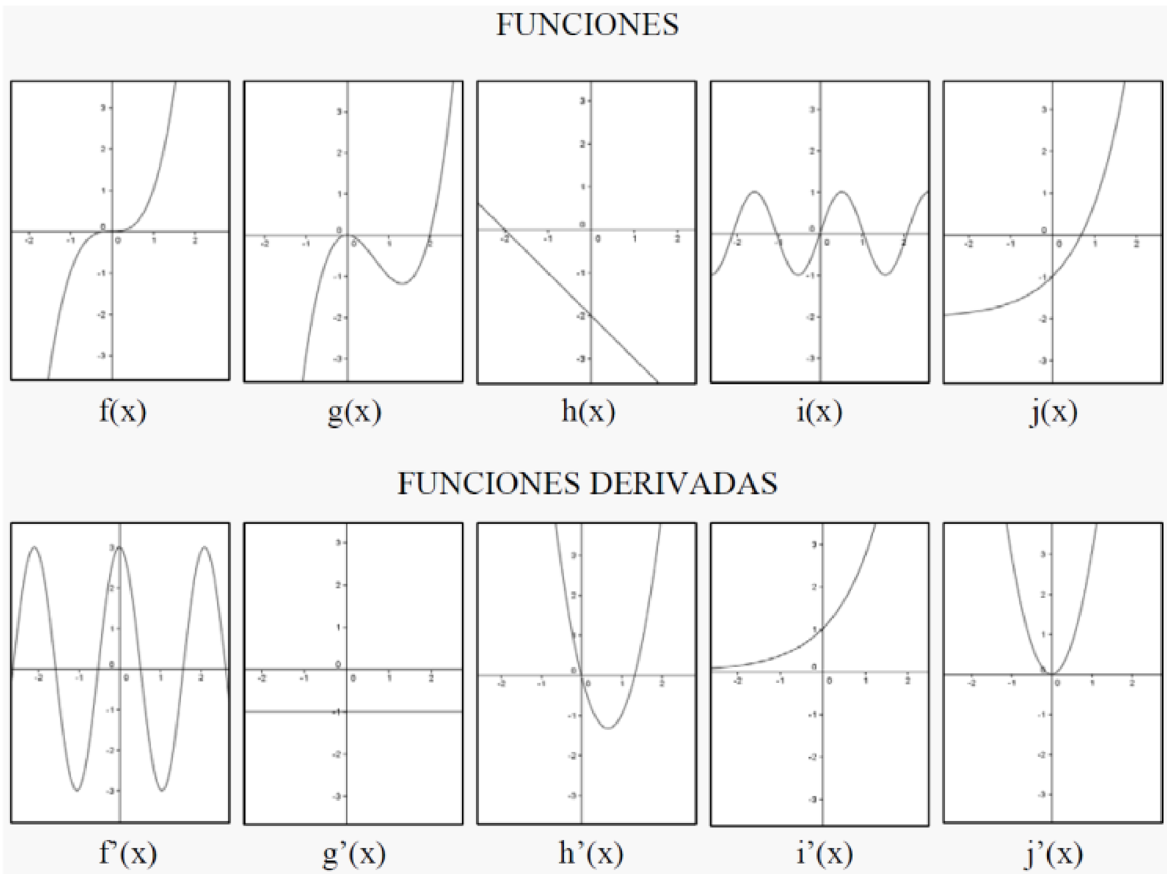


Figura 12: Graficas de funciones y sus derivadas.

Como indica Gómez (2013, p. 34) una de las mayores dificultades que presentan los alumnos en los comienzos del estudio de la derivada es relacionar una función y su función derivada a partir de sus representaciones gráficas. Es conveniente realizar este tipo de problemas, dada la riqueza conceptual que supone realizar una valoración global de dichas funciones. Se pretende que los alumnos se familiaricen con las características que definen las funciones y sus funciones derivadas, de manera cualitativa más que cuantitativa.

En este problema la relación entre las distintas gráficas es la siguiente:

La función derivada de f(x) es j´(x) porque al ser f(x) monótona creciente su función derivada debe ser positiva en todo el dominio y además en x=0 posee un punto de inflexión, lo que obliga a que su derivada sea nula en el punto x=0.

La función derivada de g(x) es h´(x) dado que g(x) es creciente en para los valores negativos de la variable independiente pero después decrece en el intervalo [0, 1,5] de modo que tiene un mínimo relativo en x=1,5. En estas condiciones la función derivada de g(x) es h´(x).

La función derivada de h(x) es g´(x). Es evidente porque h(x) es una función de primer grado y por lo tanto su función derivada debe ser una función constante.

La función derivada de i(x) es f´(x) porque i(x) tiene tres mínimos relativos y oros tres máximos relativos en los puntos en los que la función derivada f´(x) se anula.

La función derivada de j(x) es i´(x) porque j(x) es monótona creciente en todo el dominio y por lo tanto su función derivada debe ser positiva.

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

La técnica inicial, descrita en el campo de problemas 1, consiste en estudiar la tasa de variación media en intervalos cada vez más próximos al punto donde se quiere conocer la tasa de variación instantánea.

El cambio está en encontrar la situación entre las variaciones de una magnitud respecto a otra, llegando a compararlas en tiempos o valores de la variable independiente muy próximos.

Se introduce el concepto de derivada de función en un punto, como la tasa instantánea de variación de una función, a partir de las nociones de tasa media de variación de una función entre dos puntos, de pendiente de una recta secante y de recta tangente.

En concreto en el problema 1 y 2 se introduce la fórmula de la tasa de variación media, en el problema 3 se introduce la tasa de variación instantánea.

En el problema 4 introduce el límite y la interpretación geométrica de la derivada.

En el problema 5 la idea es introducir la derivada a través de aproximaciones de la tasa de variación media.

En los problemas 6, 7, 8 y 9 se introduce el cálculo algebraico de la derivada de la función en un punto y el cálculo de la función derivada de una función.

En el problema 10 se propone relacionar una función con su función derivada mediante la representación de sus gráficas y su observación siendo esa la técnica propuesta para modificar la clásica de primero calcular algebraicamente la función derivada y sacar consecuencias de la función al respecto.

3. Indica la metodología a seguir en su implantación en el aula.

La enseñanza se basa en el paradigma constructivista del aprendizaje porque los alumnos en su propio proceso de aprendizaje van resolviendo problemas que les propone el docente. Esto les va a posibilitar que los alumnos se pregunten si los conocimientos aprendidos son útiles para resolver las situaciones problemáticas. El docente asume la función de guía del aprendizaje de los alumnos durante la fase de resolución de problemas y finalmente, es el encargado de institucionalizar formalmente el concepto de función derivada y sus aplicaciones.

Aspectos concretos de la metodología de aula como si los alumnos resuelven los problemas de modo individual o en grupo se detallarán más adelante en el apartado de la secuencia didáctica y cronograma.

F. SOBRE LAS TECNICAS

1. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

Las técnicas esperadas a emplear son además de las TIC con calculadoras científicas y programas de representación de funciones como Geogebra.

1. El cálculo de la tasa media de variación en el problema 1 y 2 de manera analítica para dar lugar en el problema 3 a utilizar la tasa media de variación instantánea.

2. Con el problema 4 la técnica puesta de manifiesto es el cálculo de la recta tangente en un punto y como se deduce de los problemas anteriores la pendiente de esa recta tangente como tasa media de variación. En el problema 5 la técnica de aproximación de la derivada como el límite de la pendiente de secantes que se acercan a la tangente, mediante procedimientos numéricos.

3. En los problemas 6, 7, 8 y 9 se utilizará la técnica de límite del cociente incremental para calcular la derivada de la función en un punto determinado de una función dada. Además se introduce la técnica del cálculo algebraico para obtener la función derivada de una función.

4. Por último en el problema 10 del mismo modo que se ha hecho en los problemas 8 y 9 se trabajará la relación entre una función y su función derivada su gráfica, deduciéndolo del crecimiento y decrecimiento de la función.

G. SOBRE LAS TECNOLOGIAS (JUSTIFICACION DE LAS TECNICAS)

1. ¿Mediante que razonamientos se van a justificar las técnicas?

Las técnicas de cálculo están basadas en la tecnología sustentada en los conocimientos previos de los alumnos de funciones elementales y de la tasa de variación media

El objetivo es determinar la derivada de una función, utilizando el método de derivación por incrementos: la idea central es la de contrastar una técnica externa al modelo praxeológico con la técnica matemática dominante y desarrollar el trabajo de la técnica, de manera que se amplíe la derivación para diferentes funciones.

La derivada aparece como límite de las tasas medias de variación. Para justificarla se realizará un razonamiento algebraico en base al concepto de límite. La tasa media de variación pasa a ser instantánea en un intervalo lo suficientemente pequeño.

2. Proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

A través de los problemas propuestos en la parte E. Campos de problemas se pretende que los alumnos entiendan el sentido físico del contexto de variación y la manera de resolverlo matemáticamente con la tasa de variación media. Con el segundo problema reforzaremos el concepto de tasa de variación y al llegar al tercer problema ya nos acercamos al concepto de tasa de variación instantánea considerando que los puntos están suficientemente próximos. Así:

$$\text{TVM } [a, a+h] = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Donde a es el punto en el que queremos conocer la variación instantánea de la función y h un intervalo “suficientemente pequeño” entorno a él.

Al resolver el problema 4 la derivada adopta un nuevo significado, en este caso geométrico. En este momento podemos institucionalizar la derivada en un punto como el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto, entendiendo la pendiente como la tangente trigonométrica del ángulo que forman la recta tangente y el eje positivo de abscisas.

Dado el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto, entiendo la pendiente como la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta tangente con el eje de abscisas. Luego dada una función f geométricamente f’(a) es la pendiente de la reta tangente a la función en el punto (a, f(a)).

Después de resolver los problemas de los campos 3 y 4 podremos dar la definición de derivada y de función derivada con pleno rigor, partiendo de la expresión formal de la derivada en un punto que ya conocen los alumnos y generalizando para cualquier punto.

Se planteará la obtención de la función derivada de una función constante, de una función lineal, de una función cuadrática, de una función racional y de una función radical, todas ellas muy elementales para introducir a los estudiantes en el cálculo de derivadas inmediatas. El profesor deberá proponer un trabajo guiado a los alumnos para que intentasen deducir la expresión algebraica de la derivada de funciones polinómicas de hasta grado dos.

Sea la función f(x) continua y derivable, su función derivada es una función que se denota como f'(x) que asocia a cada punto x el valor de la derivada de f(x) en ese punto

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

La condición de continuidad es necesaria pero no suficiente, ya que hay funciones continuas que no son derivables, por ejemplo, la función valor absoluto, que tiene un punto anguloso en x=0. El recíproco si es cierto. Si existe la función derivada de una función, podemos afirmar que ésta es continua.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Proponemos una enseñanza vía resolución de problemas en grupos de clase según los cuales se construye la derivada en un punto sin haber trabajado previamente el límite de funciones a partir del estudio de la tasa de variación y el problema del cálculo de la pendiente de la recta tangente a la curva. Habrá un problema prototipo asumible para los alumnos y otros que no lo sean tanto para poner de manifiesto la necesidad del uso de la técnica a enseñar. Una vez resueltos por grupos que previamente se han formado con homogeneidad entre ellos, se hará un debate puesta en común para finalizar con la institucionalización por parte del profesor de las técnicas que han aparecido.

H. SOBRE LA SECUENCIA DIDACTICA Y SU CRONOGRAMA.

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores. Establece una duración temporal aproximada.

Esta propuesta está diseñada para impartirla en 10 sesiones de clase de una hora de duración.

Primera Sesión:

En primer lugar se informará a los alumnos que hacemos una reorganización de la clase por grupos que el profesor elegirá convenientemente para que estén equilibrados.

A continuación con todo organizado y explicado cómo se va a llevar a cabo la tarea se reparten copias del problema 1 tantas como alumnos hay para que sea más sencillo acceder aunque el trabajo sea grupal. Se hará una puesta en común después de dejar 20 minutos para que los alumnos resuelvan el problema. Posteriormente, se resolverá entre todos ya que la TVM es un conocimiento previo que los alumnos deben conocer de 4º de ESO.

Segunda sesión.

Comenzaremos la sesión recordando brevemente el trabajo del día anterior dejando los grupos igual que estaban organizados y se reparte el problema 2 indicando que la contextualización no influye mucho en la resolución. En unos 15 minutos se hace puesta en común entre los grupos y haciendo uso de la pizarra el profesor repasa la tasa de variación media ya vista en los problemas.

Antes de acabar se reparte el problema 3 para que los alumnos lo vayan resolviendo por grupos aunque, evidentemente, no les vaya a dar tiempo a resolverlo.

Tercera sesión.

Comenzamos revisando el problema 3 del movimiento de un automóvil .Dejamos trabajar durante unos 10 minutos el problema siempre por grupos los mismos organizados desde la primera sesión, a no ser que se haya destacado algún grupo donde resultaba haber mayor número de expertos en ese caso el profesor con su observación durante las sesiones anteriores, reorganizará los grupos para que vuelvan a estar equilibrados.

La puesta en común de este problema se institucionalizará la TVI como límite de TVM lo que supone un primer acercamiento al concepto de derivada. Seguiremos repartiendo el problema 4, que aunque requiere un poquito más de tiempo ya que se solicitan gráficas, durante la corrección se quedará institucionalizada la interpretación geométrica de la derivada.

Cuarta sesión

Empezamos recordando en pizarra y recapitulando las técnicas empleadas para resolver los 3 primeros problemas estructurando en la pizarra dirigido por el profesor con preguntas abiertas a la clase de manera que no se convierta en clase magistral, de hecho no se toman notas mientras se recapitula el trabajo realizado en las sesiones anteriores.

Directamente se reparte el problema 5. Este problema no es contextualizado tiene muchos apartados donde se pone de manifiesto todos los conocimientos y relaciones entre las gráficas, las rectas tangentes y secantes.

Todo lo resta del tiempo de la sesión de clase se dedica a resolver dudas sobre la tarea propuesta.

Sesión quinta

Empezaremos repartiendo los problema 6 y7.Con estos problemas se pretende introducir la definición clásica de derivada en un punto.

Primero recapitularemos todo lo hecho en la sesión anterior para que tenga nexo de conexión con el problema repartido entre los alumnos.

Se deja tiempo para resolverlos en clase, esta metodología intenta que las horas de clase sean efectivas y no se tenga que trabajar en casa nada, sino que de tiempo para asentar las ideas e institucionalizando la técnica de cálculo algebraico de la derivada y relacionar los saberes de un día tras otro para convertirlos en conocimientos.

Sesión sexta

Se reparte los problemas 8 y 9 y se deja tiempo de resolución. Son problemas de funciones de la derivada de la función recíproca y la función radical así que sobre unos 20 minutos será suficiente para después se hace la puesta en común.

Sesión séptima

Ya tenemos trabajado el concepto del calculo algebraico de la derivada de la función polinómica, recíproca y radical.

Llevamos más de una semana y de manera natural se ha introducido la definición de derivada en un punto. Empezáremos con un debate sobre el trabajo realizado en la sesiones anteriores y haremos notar que han sido los alumnos los que han llegado a la conclusión de que el cálculo de la derivada en un punto supone calcular el límite de la tasa de variación media en un entorno del punto que tiende a ser cero. El profesor escribirá en pizarra la expresión algebraica de la derivada de una función en un punto.

Sesión octava

Recapitulamos todo lo dado en la semana en un pequeño esquema institucionalizando la derivada de algunas funciones polinómicas radicales y racionales elementales y repartimos el problema 10 para que los alumnos relacionen gráficamente una función con su función derivada.

Sesión novena

Se realizará la prueba de evaluación.

Sesión décima

Se resolverá la prueba de evaluación planteada en pizarra.

I. SOBRE LA EVALUACION.

1. Diseña una prueba escrita que evalué el aprendizaje realizado por los alumnos.

La prueba escrita tendrá cinco problemas que los alumnos resolverán de forma individual.

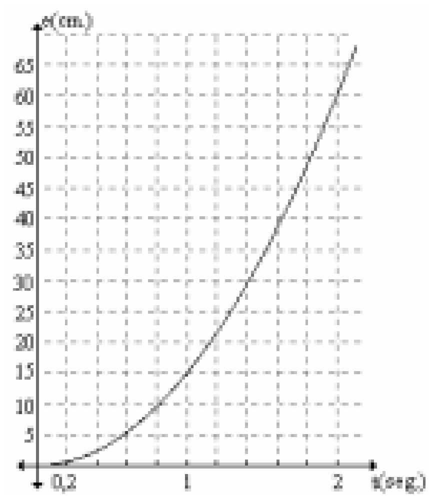
Las soluciones de los problemas propuestos se muestran en el Anexo 1

PRIMER PROBLEMA

En un experimento de laboratorio se estudió la caída libre de una bola de hierro pequeña. La gráfica muestra el espacio recorrido por la bola (en centímetros) en función del tiempo t (en segundos).

a) Determina la velocidad promedio de la bola en el intervalo de 1 a 2 segundos.

b) Observa el gráfico y completa la tabla considerando los intervalos (1, 1 + Δt), teniendo en cuenta los valores de Δt que aparecen en la primer fila de la tabla.



Δt	0,8 seg	0,6 seg	0,4 seg	0,2 seg
Intervalo (1, 1 + Δt),				
Espacio recorrido				
Velocidad promedio				

c) ¿Cuál es aproximadamente la velocidad de la bola en el instante t =1 segundo?

SEGUNDO PROBLEMA

Si un vehículo se mueve según la función $s(t)= 4t^2-t$, siendo t el tiempo en segundos y el espacio medido en metros.

a) Halla la velocidad media del móvil en los tres primeros segundos de recorrido y entre los segundos tres y cinco.

b) Obtén la velocidad instantánea en el segundo 1 y en el segundo 3.

c) Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la función en los instantes t=1 y t=3 segundo.

d) Dibuja la función y las dos rectas tangentes que has hallado en el apartado c)

TERCER PROBLEMA

Se introduce en un cultivo una población 100 bacterias. El número de bacterias crece mediante la expresión donde el tiempo viene expresado en horas $n(t)=1000\sqrt{t+90}$

Calcula:

a) Mediante un procedimiento algebraico la función derivada de la función n(t)

b) El número y la tasa instantánea de crecimiento en el instante t=10 horas.

c) El instante en el que la velocidad de crecimiento es de 45 bacterias/hora.

CUARTO PROBLEMA

Se quiere vaciar un depósito de agua. Sea $Q(t) = 200(900 + t^2 - 60t)$ la función que describe el número de litros que quedan en el depósito al cabo de t minutos de haber comenzado a vaciarlo.

a) ¿Cuántos litros de agua tiene inicialmente el depósito?,

b) ¿cuánto tiempo tardará en vaciarse?,

c) ¿cuál es la función que describe el número de litros que han salido al cabo de t minutos de haber comenzado a vaciarlo?

d) Calcula la función derivada de la función Q utilizando métodos algebraicos y su valor en $t = 10$ y $t = 20$ minutos.

e) Representa gráficamente la función Q(t) y su función derivada y después interpreta ambas funciones en el contexto del problema.

QUINTO PROBLEMA

Considera la función $f(x) = |x-1|$ que se denomina "valor absoluto de x-1"

La función valor absoluto convierte en positivo los valores negativos y mantiene como positivos los valores positivos. Es decir:

$$f(x) = x - 1, \ \ si \ \ x \geq 1 \ \text{y} \ f(x) = -x + 1, \ \ si \ \ x \leq 1$$

Se pide:

a) Realiza la gráfica de esta función.
b) Calcula la derivada de la función en x=0 y x=2
c) ¿Puedes calcular la derivada de la función en x=1?
d) Calcula su función derivada en los intervalos dónde sea posible.

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

En la problema 1 donde se relaciona el concepto de razón de cambio con su interpretación geométrica como pendiente de una recta. Los alumnos han de calcular la velocidad media e instantánea para demostrar que conocen como obtener la tasa de variación media de una función en un intervalo y en un punto respectivamente.

Mediante el problema 2 los alumnos han de demostrar que en las funciones que dependen de espacio tiempo (velocidad) son capaces de identificar ésta con la tasa de variación instantánea, y con la derivada de la función. También debe hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función en instantes determinados y saber dibujar la función y las rectas tangentes.

En el problema 3 los alumnos han de poner de manifiesto su capacidad de aplicación de los conocimientos previos sobre las funciones cuadráticas radicales y su relación con los saberes aprendidos de tasa de variación media e instantánea. Se pretende evaluar si los alumnos saben distinguir entre la velocidad media y la velocidad instantánea, es decir, que en vez de calcular el limite cuando h tiende a cero del cociente incremental en el punto 5 de la función espacio dada , hacer la tasa variación media entre los puntos t=0 y t=5.Se evalúa si los alumnos conocen el procedimiento algebraico para encontrar la función derivada de una función dada.

En el problema 4 se pone de manifiesto el conocimiento de la relación entre la definición de la derivada como límite de la tasa de variación media en un intervalo y saber obtener los límites. Además pretendemos saber si los alumnos saben relacionar la gráfica de una función y de su función derivada.

En el problema 5 queremos evaluar si los alumnos son capaces, en el primer apartado, de realizar la gráfica de funciones lineales. En el segundo apartado, calcular la derivada de la función en dos puntos no problemáticos. En el tercer apartado darse cuenta que en x=1 hay un punto anguloso en el que no es posible definir la derivada. Y en el último apartado encontrar las funciones derivadas correspondientes a las dos ramas de la función.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

Problema 1

La parte a) tengo la certeza de que la contestaran correctamente, en general, aunque creo que uno de los errores que podrían cometer seria escribir el resultado en metros/segundos porque siempre el espacio en la asignatura de física se expresa en metros y la velocidad en m/s, a diferencia del ejercicio propuesto.

En la parte b) no deberían de producirse errores en las contestaciones, porque siendo el ejercicio la sustitución “del incremento de t” por los valores que se dan y resolviéndose conjuntamente por los alumnos, la dificultad consistirá en ponerse de acuerdo en el grupo y escribir bien el resultado que como las cuentas son tan sencillas suelen tender a no hacerlas con la calculadora y se cometen errores.

En la parte c) se pretende evaluar si son capaces de saber exactamente hacer el límite cuando el “incremento de t” tiende a cero, es decir si saben aplicar la definición de derivada de función en un punto, aunque puedan obtener el resultado por observación ya que la tabla anterior arroja una buena pista.

Problema 2

La respuesta esperada es que sepan resolver correctamente aplicando la tasa de variación media y que no tengan problemas con las operaciones ya que son muy sencillas en el apartado a, mientras que en el apartado b puede que haya errores al calcular el límite ya que hay que aplicar identidades notables.

Problema 3

a) La respuesta que se espera es que calculen bien la tasa instantánea haciendo el límite mediante las técnicas aprendidas para resolver indeterminaciones.

b) En este caso solo se pide que se fijen en que hay que sustituir en la función y en la función derivada para hacer el cálculo correcto.

c) Ahora tienen que plantear una ecuación y resolver que el problema está contextualizado. Luego solo hay que buscar la “t” en la ecuación de la función derivada.

Problema 4

a) En este apartado se espera que los alumnos no tengan ningún problema en sustituir en la función dada el valor 0

b) Puede que aquí los alumnos realizarán más operaciones de las necesarias puesto que multiplicaran la función por 200 para resolver la ecuación de segundo grado.

c) La respuesta esperada en este apartado es que los alumnos calculen la tasa de variación media en el intervalo [0,3] Sin embargo, puede que algunos alumnos no sepan todos describir la función pedida.

d) En este apartado se espera que los alumnos hagan bien la derivada y la evalúen sin problema en los puntos dados.

e) Con respecto a la rapidez con la que se vacía el deposito aquí creo que a los alumnos les va a inducir a error al hacer los cálculos, porque el resultado es negativo y hay que interpretar que la velocidad disminuye con el tiempo.

Problema 5

a) En el apartado a) se espera que los alumnos sepan dibujar las dos ramas de la función.

b) Tampoco esperamos dificultades para que los alumnos concluyan que la derivada en x=0 es -1 y que la derivada en x=2 es 1.

c) En este apartado sí que esperamos que aparezcan dificultades porque los alumnos se van a encontrar con dos valores diferentes de la derivada en x=1. Cabe esperar que les parezca extraña la aparición de un punto anguloso.

d) En este apartado los alumnos no deberían tener dificultades para encontrar la función derivada en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$ porque se trata de la composición de dos funciones afines.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Para calificar lo aprendido tendremos en cuenta varios factores, entre ellos las distintas formas de resolver los problemas.

Todos los problemas se valoran con dos puntos, dividiéndose estos dos puntos entre los distintos apartados de la actividad propuesta, si consta de dos o más apartados, o bien recayendo íntegramente en la resolución del ejercicio, si éste no tiene apartados. Por tanto, los ejercicios propuestos tendrán la siguiente calificación:

El problema 1 consta de 3 apartados. Cada apartado supone 2/3 de punto, que se contarán completos si el resultado es correcto.

El problema 2 tiene cuatro apartados cada uno de ellos valdrá 1/2 punto. No se valorará un resultado numérico sin ningún tipo de explicación.

El problema 3 consta de 3 apartados así que cada uno se valorará de ser resuelto correctamente con 2/3 de punto.

El problema 4 se divide en un total de 5 apartados así que cada uno de ellos está valorado con 2/5 punto siempre que se contesten correctamente, ya que en caso contrario el apartado erróneo no puntuará nada.

El problema 5 se valorará sobre 2 puntos, asignando medio punto a cada uno de los cuatro apartados, con la condición de que todas las respuestas estén argumentadas.

Las respuestas escritas y correctas de los problemas que se limiten al resultado final del ejercicio propuesto, en las que no se ha hecho constar o se hayan reflejado las ejecuciones de los cálculos necesarios para su contestación, o la justificación escrita de su resolución, no puntuarán, contando como ejercicio no contestado o en blanco. Previamente a la realización de la prueba, se habrá informado al alumnado que no vale reflejar solo un número o el resultado final como respuesta a la actividad propuesta, aunque este sea el resultado correcto, y que por tanto, el problema así contestado no puntuará.

BIBLIOGRAFIA

Antonio, M., González, L., Lorenzo, J., Molano, A., Del Rio, J., Santos, A., De Vicente, M.(2008).*Matemáticas 1 Bachillerato aplicadas a las Ciencias Sociales I.* Madrid: Editorial Santillana.

Artigue, M., Batanero, C., Kent, P., & Artigue, M. (2007). *Mathematics thinking and learning at post-secondary level.*

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 97-140.

Azcárate, C., Bosch, D., Casadevall, M., y Casellas, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Síntesis.

Azcárate, C. (2014). Réplica a la ponencia "adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada". En González, María Teresa; Codes, Myriam; Arnau, David; Ortega, Tomás (Eds.), Investigación en educación matemática Salamanca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange, al diseño de una situación didáctica. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3 (3), 265-292

Grupo Cero (1977) Matemáticas de Bachillerato.Volumen1.Valencia: Roberto Guillén.

Godino, J. D., Contreras, Á., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción *Didactique des Mathématiques*, *26*(76), 39.

Gómez, M. (2013). Introducción a la derivada en primer curso de Bachillerato. Trabajo fin de máster del Profesorado en Educación Secundaria. Universidad de Zaragoza

González, A., y Cantoral, R. (2014). Una propuesta de aprendizaje para la pendiente con el uso de Geogebra. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática

Educativa México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.(pp. 2151-2158)

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., y Moll, V. F. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1).

Vázquez, M. S., y del Rincón, T. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, (32), 87-115.

Vrancken, S., Engler, A., Müller, D., y de Santa Fe, P. (2008). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. *Premisa*. *Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática.* 10 (38), pp. 36-46

ANEXO 1: RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA PRUEBA DE EVALUACION

PROBLEMA 1.

Se calcula la tasa de variación media entre 1 y 2 segundos

TVM [1,2]=$\frac{(60-15)}{1} = 45c$m/seg

Δ t	0,8 seg	0,6 seg	0,4 seg	0,2 seg
Intervalo (1, 1 + Δ t),	(1, 1,8)	(1, 1,6)	(1, 1,4)	(1, 1,2)
Espacio recorrido	35	25	15	5
Velocidad promedio	43,75	41,6	37,5	25

La velocidad aproximadamente en el segundo 1 es próxima a 31cm/s

PROBLEMA 2.

a) La velocidad media a los 3 segundos es de 16,5m/s.

La velocidad media es la tasa de variación media en el intervalo [3,5]

TVM [3,5]=$\frac{(4*5^2-5)-(4*3^2-3)}{2} = 31m/s$

b) La velocidad instantánea en t=1 y en t=3 hay que hallar los límites del cociente incremental el resultado es 7m/s y 23m/s.

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(1+h)-s(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(4(1+h)^2-1+h)-3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{4(1+h^2+2h)-1-h-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h^2+7h}{h} = 7$$

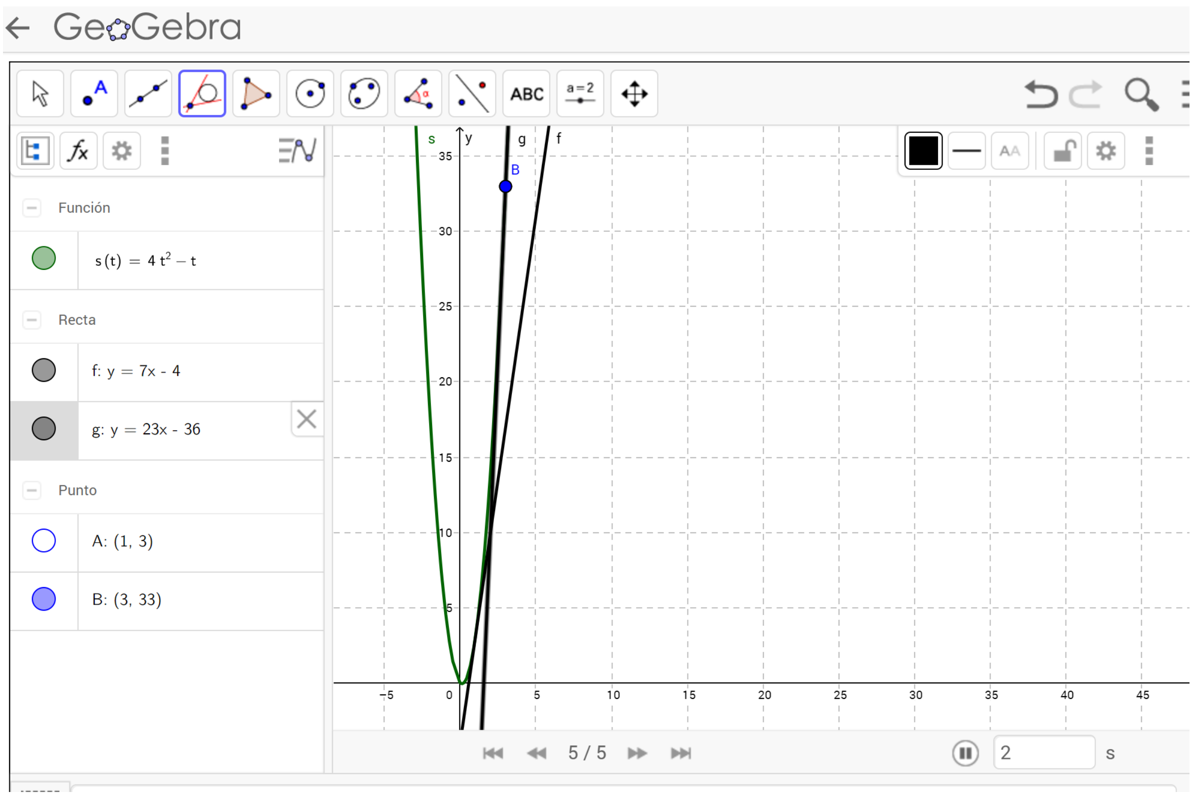
$$\lim_{h\to 0}\frac{s(3+h)-s(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(4(3+h)^2-3-h)-33}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{4(9+h^2+6h)-3-h-33}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h^2+23h}{h} = 23$$

c) Las rectas tangentes en los puntos t=1 y t=3 su pendiente es exactamente 7 y 23 respectivamente , calculados en el apartado anterior , luego solo queda recordar como es la ecuación punto tangente de la recta y tener en cuenta que la primera pasa por el punto (1 ,s(1))=(1,3) y la segunda pedida por el punto (3,33) luego las ecuaciones de las rectas solicitadas son respectivamente:

y-3=7(x-1)

y-33=23(x-3)

d)



PROBLEMA3.

a)

$$n'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{n(t+h)-n(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1000\sqrt{t+h+90})-(1000\sqrt{t+90})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1000(t+h+90-t-90)}{h(\sqrt{t+h+90}+\sqrt{t+90})} = \lim_{h\to 0}\frac{1000h}{h(\sqrt{t+h+90}+\sqrt{t+90})}$$

$$= \frac{1000}{2\sqrt{t+90}} = \frac{500}{\sqrt{t+90}}$$

b)

$$n'(10) = \lim_{h\to 0}\frac{n(10+h)-n(10)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1000\sqrt{10+h+90})-(1000\sqrt{10+90})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1000(10+h+90-10-90)}{h(\sqrt{10+h+90}+\sqrt{10+90})}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1000h}{h(\sqrt{10+h+90}+\sqrt{10+90})} = \frac{1000}{2\sqrt{10+90}} = \frac{500}{\sqrt{10+90}}$$

$$= 50$$

n’ (10)=50 bacterias/hora

c)n’ (t)=$\frac{500}{\sqrt{t+90}} = 45$ buscamos ahora la variable t

$\frac{500}{\sqrt{t+90}} = 45$

500=45$\sqrt{t+90}$; $\frac{500}{45^2}^2 = \sqrt{t+90}^2$

t=33,5

Luego será al cabo de las 33,5 horas. Esto quiere decir que la velocidad de crecimiento de la colonia de bacterias va disminuyendo conforme aumenta el tiempo.

PROBLEMA 4

a) b) c) Inicialmente es cuando t = 0, luego hay Q (0) = 180 000 litros. El depósito estará vacío cuando Q (t) = 0, es decir, cuando 900 + t^2 – 60t = 0 y esto sucede a los t = 30 minutos. La función que describe el número de litros que han salido será:

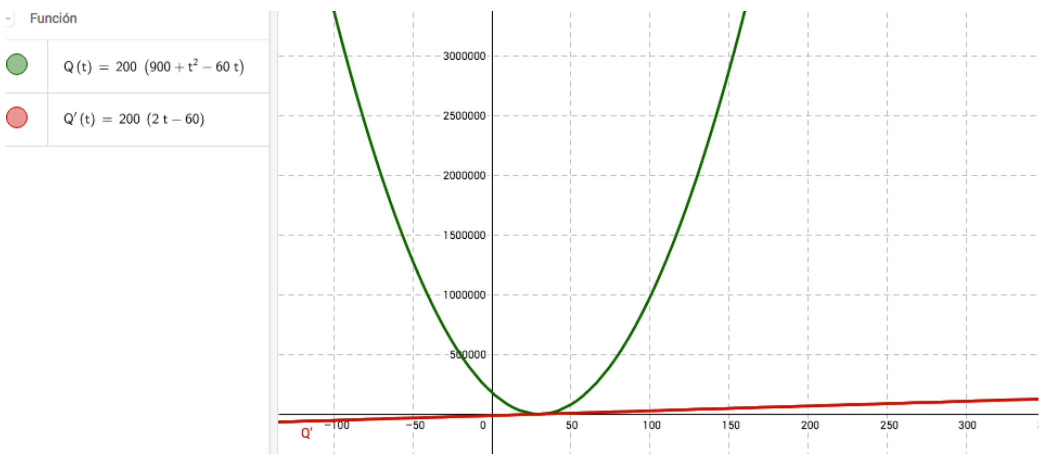
S(t) = 180 000 – Q (t) = 12 000t – 200t^2 en el intervalo [0, 30].

$Q'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{Q(10+h)-Q(10)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(200(900+(t+h)^2-60(t+h))-(200(900+t^2-60t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{200(900+t^2+h^2+2th-60t-60h-900-t^2+60t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{200(h^2+2th-60h)}{h} = \lim_{h\to 0} 200h + 400t - 60 = 400t - 1200$

$$Q'(10) = \lim_{h \to 0} \frac{Q(10+h) - Q(10)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(200(900 + (10+h)^2 - 60(10+h)) - (200(900 + 10^2 - 60 * 10)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{200(900 + 100 + h^2 + 20h - 600 - 60h - 900 - 100 + 600)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{200(h^2 - 40h)}{h} = \lim_{h \to 0} 200h - 8000 = -8000$$

$$Q'(20) = \lim_{h \to 0} \frac{Q(20+h) - Q(20)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(200(900 + (20+h)^2 - 60(20+h)) - (200(900 + 20^2 - 60 * 20)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{200(900 + 400 + h^2 + 40h - 1200 - 60h - 900 - 400 + 1200)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{200(h^2 - 20h)}{h} = \lim_{h \to 0} 200h - 4000 = -4000$$

d) Las representaciones de las funciones son:



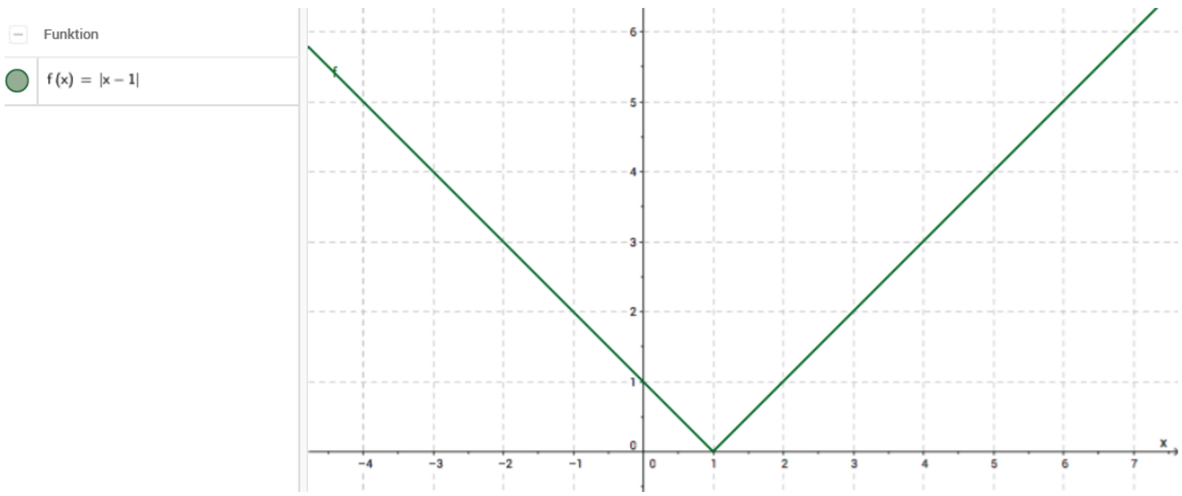
Q(t) mide el volumen de agua que queda en el deposito y Q'(t) la variación del volumen de agua que queda en el depósito. Esta variación oscila del siguiente modo: -1200 l/m en el instante t=10m, -400 l/m en t=20. Es decir , la rapidez de vaciado disminuye cuando aumenta el tiempo.

Q'(t) = 200(2t – 60) es la función que proporciona la rapidez con la que se vacía el depósito. En t = 20 y t = 40

Q'(10) = 200(20 – 60) = –8 000 Q'(20) = 200(40 – 60) = –4 000 lo cual indica que la velocidad de vaciado disminuye con el tiempo.

PROBLEMA 5

a) La representación gráfica es:



b) La derivada de la función en x=0 es -1 y en x=2 es 1.

c) No existe la derivada de la función en x=1. La función no es derivable en x=1.

d) La función derivada en el intervalo (-∞ , 1) es la función constante f(´x) = -1; y en el intervalo (1, +∞) es la función constante f(´x) = 1.