



Universidad
Zaragoza



Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

TRABAJO DE FIN DE GRADO

GRADO EN FÍSICA

Estudio de un modelo tipo autómatas celular para simular la dinámica de empresas en el mercado

Autor:

Ricardo GONZÁLEZ LÓPEZ

Directores:

Dr. Amalio FDEZ.-PACHECO PÉREZ

Dr. Javier GÓMEZ JIMÉNEZ

22 de junio de 2017

Índice

1	Introducción	2
2	Descripción del modelo	7
3	Resultados	10
3.1	Modelo unidimensional	10
3.2	Modelo bidimensional	12
3.3	Modelo tridimensional	14
3.4	Modelo en la red de Bethe	16
4	Estadística de empresa en casos reales	19
5	Discusión	21
6	Conclusiones	24
	Agradecimientos	24
	Referencias	25
	Anexo A: Generalización del algoritmo de Hoshen-Kopelman	26
	Anexo B: Cálculo de pendientes en regiones “ley de potencias”	32
	Anexo C: Construcción correcta de la red de Bethe	37

1. Introducción

En Física de Muchos Cuerpos la palabra complejidad puede tener significados muy diferentes. Sin duda los fenómenos de caos y fractales estarían incluidos en este concepto, así como el fenómeno de la criticidad auto-organizada, al que me referiré a continuación.

En 1987, Bak, Tang y Wiesenfeld (Bak et. al., 1987) propusieron que en determinados sistemas naturales la complejidad que muestran es debida a la tendencia que tienen estos sistemas a evolucionar de manera espontánea hasta un estado crítico que presenta comportamientos de tipo ley de potencias.

Uno de los ejemplos que ilustra este concepto es la ley Gutenberg-Richter en sismología, donde la relación entre el número de terremotos y el área de ruptura en los mismos es del tipo ley de potencias.

A este fenómeno se le llamó *criticidad auto-organizada* (self-organized criticality, SOC) y, a diferencia de los puntos críticos observados en las transiciones de fase, este estado no se alcanza mediante el ajuste de cierto parámetro externo al sistema, denominado parámetro de control, sino que es debida a las interacciones entre los elementos que forman el mismo, apareciendo así las leyes de potencias entre las magnitudes del sistema.

Basándose en esta teoría han sido muchos los modelos propuestos que exhiben criticidad auto-organizada: pilas de arena (propuesto en el propio artículo de Bak et al., 1987), terremotos (Olami al., 1992), la evolución biológica (Bak y Sneppen, 1993) o incendios forestales (planteado por Bak et. al., 1990 y desarrollado por Drossel y Schwabl, 1992).

Es precisamente el modelo desarrollado en este último artículo (Drossel y Schwabl, 1992) el que nos ha servido como punto de partida para nuestro trabajo. Dicho modelo es un autómata celular, un concepto propuesto por John von Neumann (von Neumann, 1951) para describir sistemas compuestos por elementos discretos interactuantes. Von Neumann propuso representar estos sistemas como un conjunto de celdas (autómatas) que evolucionan con pasos de tiempo discretos. Cada celda puede tomar un determinado valor dentro de un conjunto establecido y dicho valor varía en función de cómo interactúe con su entorno, siguiendo las normas que caractericen el modelo.

En el caso del modelo de incendios forestales el autómata celular está representado por una malla bidimensional con celdas cuadradas en la que cada celda interactúa con sus cuatro celdas vecinas.

Las reglas que plantearon Bak et al. (1990) para determinar la evolución del sistema fueron modificadas por Drossel y Schwabl (1992) y reinterpretadas posteriormente por Donald Turcotte, tal y como las recoge este autor en su libro *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. Las reglas son las siguientes:

- I En cada paso de tiempo se lanza una partícula a la red, que caerá de forma equiprobable en cualquiera de las celdas que la forman.
- II La partícula lanzada a la red será una semilla o una cerilla. La proporción entre semillas y cerillas viene dada por un parámetro llamado frecuencia de ignición (*spark rate*), f .
- III Si la partícula lanzada es una semilla:

- a) Si cae sobre una celda vacía, crecerá un árbol en dicha celda.
- b) Si cae sobre una celda ya ocupada por un árbol, no tendrá ningún efecto sobre el sistema.

IV Si la partícula lanzada es una cerilla:

- a) Si cae sobre una celda vacía, no tendrá ningún efecto sobre el sistema.
- b) Si cae sobre una celda ocupada, quemará el árbol que la ocupa y el fuego se propagará a las celdas colindantes que estén ocupadas, las cuales a su vez expandirán el fuego a sus celdas vecinas ocupadas, destruyéndose el cúmulo (*cluster*) al que el árbol inicial pertenecía.

De este modo si, por ejemplo, $f = 1/100$ se lanzarán 100 semillas a celdas aleatorias de la malla (que podrán generar un máximo de 100 árboles nuevos, o menos si alguna cae en una celda ya ocupada) antes de lanzar una cerilla a la red. Una vez transcurridos esos 100 pasos de tiempo marcados por f se lanza una cerilla sobre la malla de forma aleatoria. Si la celda afectada está ocupada, el árbol que la ocupa se prende fuego, dando comienzo a un incendio que se propaga por todo el cúmulo (conjunto de celdas ocupadas que son vecinas cercanas¹) al que pertenece el árbol. El resultado de dicho incendio será la destrucción del cúmulo de árboles sobre el que cayera la cerilla, como se indica en la Figura 1.

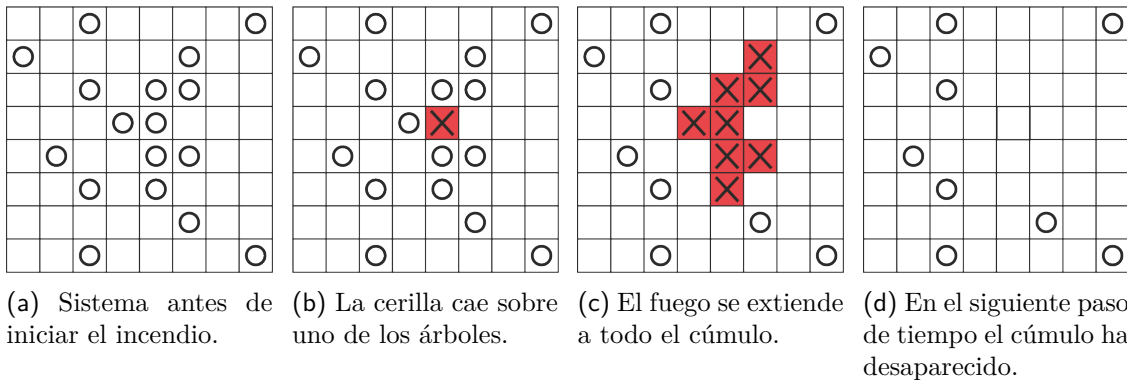


Figura 1: Propagación de un incendio en un cúmulo de árboles.

Todo el proceso de destrucción del cúmulo termina antes de lanzar la siguiente partícula a la malla; es decir, existen una completa separación de escalas temporales entre los dos procesos clave en el modelo: los incendios (que transcurren según una escala temporal “rápida”) y el crecimiento del bosque (que transcurre según una escala temporal “lenta”).

Si se simula el comportamiento de dicho sistema a lo largo de un tiempo lo suficientemente largo y se acumulan las estadísticas del tamaño de los cúmulos que se van destruyendo en cada incendio se obtiene el resultado recogido en la Figura 2.

¹En el caso de una red bidimensional los vecinos cercanos a una celda dada son las cuatro situadas al N, al S, al E y al O de dicha celda. No se consideran como vecinos cercanos las celdas situadas en diagonal.

Como se puede ver en la figura las distribuciones siguen una ley de potencias para tamaños pequeños de los cúmulos ya que al representar los dos ejes en escala logarítmica las distribuciones, al menos en su región inicial, se ajustan a una recta. Esto quiere decir que la relación entre frecuencia F y tamaño del cúmulo destruido N es de la forma $F \propto N^{-\alpha}$, donde α es la pendiente de la recta observada en la distribución de tamaños y, como se mencionó anteriormente, esto es un indicio de que el sistema presenta criticidad auto-organizada.

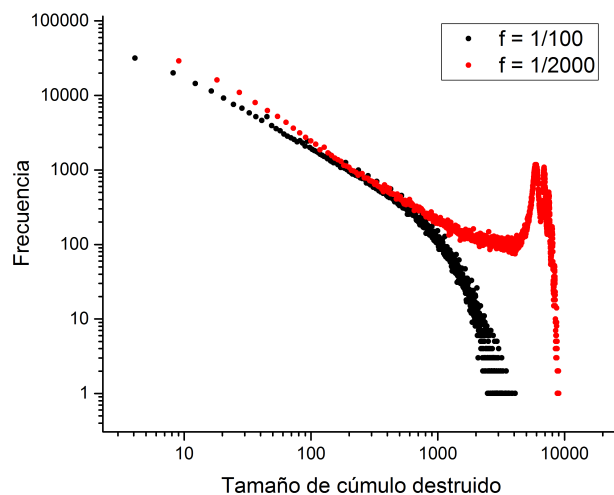


Figura 2: Distribución de tamaños de los cúmulos destruidos en el modelo de incendios forestales en una malla 100x100.

Sin embargo, puede observarse que para los dos valores de la frecuencia de ignición mostrados en la Figura 2, f , el modelo no se comporta de la misma manera. Siguiendo la nomenclatura empleada por Main (1996), a los sistemas que muestran comportamientos como el que se observa en el modelo de incendios forestales para un valor del parámetro f de 1/100 se les llama *subcríticos*, ya que no se observan los eventos de mayor tamaño (los que tienen un tamaño del orden del número de celdas del sistema, 10.000 en el ejemplo de la Figura 2), rompiendo la ley de potencias que caracteriza a los fenómenos críticos. En el caso de incendios forestales se debe a que las cerillas se lanzan con tanta frecuencia que es muy probable que se destruya un cúmulo antes de que aumente en gran medida su tamaño, modificando así la distribución de tamaños de los incendios respecto a la de un fenómeno crítico estándar, tal y como se ve en la Figura 2.

Por otra parte, los sistemas que exhiben comportamientos como en el caso $f = 1/2000$ se denominan *supercríticos* y se caracterizan por producir un pico en la región de eventos de gran tamaño. En el modelo de incendios forestales este pico se produce por la formación de cúmulos de gran tamaño debidos a la baja frecuencia con la que se lanzan las cerillas, de modo que es más probable encontrar cúmulos muy grandes que cúmulos de dimensiones intermedias.

Además, en la Figura 2 puede observarse en este último caso un corte repentino en la distribución de cúmulos destruidos, coincidiendo con el valor 10.000. Este es el llamado *efecto de*

borde o de *tamaño finito*, que aparece porque el sistema a estudiar no es de tamaño infinito, sino que está limitado a las celdas disponibles en la malla en la que definimos el modelo (en este caso el sistema es de tamaño 100x100, por lo que el tamaño del cúmulo máximo observable es de 10.000), provocando este corte en la distribución.

Aunque la distribución tamaño-frecuencia de los bosques destruidos es uno de los observables más significativos e interesantes, no es el único en el que podemos fijarnos. Otro parámetro cuya evolución temporal merece la pena representar es la *ocupación*, definida como la fracción de celdas ocupadas por árboles. La Figura 3 muestra el gráfico de ocupación para los dos modelos mostrados en la Figura 2.

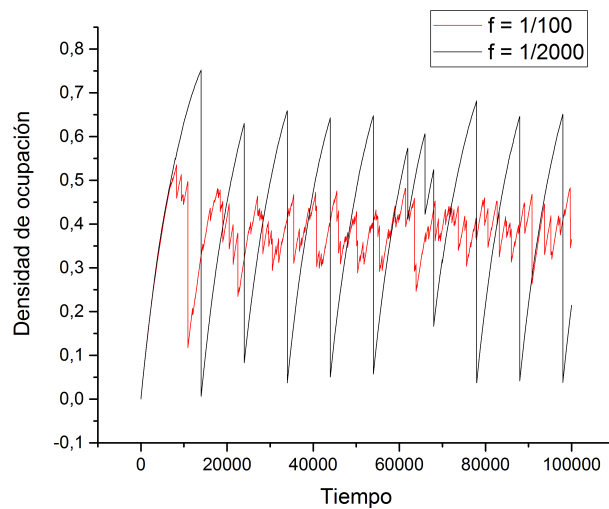


Figura 3: Evolución temporal de la ocupación de una malla 100x100 en el modelo de incendios forestales para dos valores de la frecuencia de ignición.

En la gráfica observamos que para el valor $f = 1/2000$ cada vez que se produce un incendio la malla está muy densamente poblada, por lo que cuando un árbol se prende fuego es muy probable que pertenezca a un cúmulo de tamaño muy grande que, al desaparecer, vacíe la red casi por completo. En el caso $f = 1/100$, como se ha mencionado anteriormente, los árboles no tienen tiempo de formar cúmulos tan grandes antes de desaparecer (ya que la frecuencia con la que se lanzan las cerillas es mucho mayor) por lo que la ocupación de la red tiende a aumentar hasta alcanzar un valor medio a partir del cual oscila como consecuencia del proceso de plantación-destrucción del modelo.

Con este tipo de gráfico se puede distinguir también entre comportamientos supercríticos y subcríticos, ya que en los primeros se observarán ciclos de vaciado que disminuyan drásticamente la ocupación en la malla, mientras que en los segundos la ocupación se mantendrá relativamente constante, mostrando pequeñas oscilaciones alrededor de un valor medio, que nos indican que el sistema ha alcanzado un estado estacionario con fluctuaciones de tamaño finito.

El modelo de incendios forestales ha sido modificado y adaptado para la simulación de fenómenos muy variados, diferentes a los incendios, desde la propagación de enfermedades (Johansen, 1994) a la generación de terremotos en fallas sísmicas (Tejedor et al., 2009). El nuevo modelo que presentamos en este trabajo también se inspira en el modelo de incendios forestales, pero con algunas modificaciones sustanciales que nos permiten usarlo como un modelo de dinámica de empresas en el ámbito de la economía. Le llamaremos modelo FDM (*Firm Dynamics Model*), y en él establecemos un cambio en la nomenclatura anterior: las partículas que ocupan la red dejan de identificarse como árboles y pasan a entenderse como empresarios o trabajadores, cada uno con una relevancia distinta en la red. Además, lo que hasta ahora entendíamos simplemente como un cúmulo de árboles pasará a ser una empresa, es decir, un conjunto de empresario y trabajadores. En este modelo se estudia la distribución de empresas en la red según su tamaño, entendiendo por tamaño el número de individuos (trabajadores y empresarios) que formen el cúmulo respectivo.

La diferencia esencial entre el FDM y el modelo de incendios forestales reside en que en nuestro modelo deja de existir un parámetro como la frecuencia de ignición, es decir, que las empresas se formarán y desaparecerán sin necesidad de lanzar una partícula destructiva como lo eran las cerillas en el modelo de incendios forestales. En este modelo, la destrucción de empresas se autoregula siguiendo las normas que lo definen.

Estudiaremos el FDM en las dos modalidades en las que lo hemos planteado, según cómo se produzca la fusión de empresas cuando dos cúmulos en la red se unen: amistoso (*friendly*) y agresivo (*aggressive*). Las normas que definen a cada variante del modelo se explican en el apartado 2.

Además, implementaremos el modelo sobre diferentes tipos de mallas ya que, así como en el modelo original de incendios forestales tiene sentido limitar las simulaciones a redes bidimensionales, no lo tiene tanto en el modelo de dinámica de empresas porque desconocemos, a priori, la dimensionalidad del espacio en el que se desarrolla su dinámica.

Una vez obtenidos los resultados de nuestro modelo los compararemos con datos empíricos de estadística de empresas en diferentes países para comprobar si se ajustan a las predicciones del *Firm Dynamics Model*, estableciendo en ese caso las posibles equivalencias entre nuestro modelo y los casos reales.

2. Descripción del modelo

Como se ha mencionado anteriormente, en el FDM estudiaremos la distribución de empresas en la red según su tamaño para comparar los resultados obtenidos con datos reales de la frecuencia de las empresas según su tamaño en diferentes países.

El elemento esencial para cualquier autómatas celular son las reglas que definen su evolución. En nuestro caso, y como hemos adelantado ya en la Introducción, presentamos dos variantes: hablaremos de la versión amistosa o agresiva del modelo. Ambas versiones parten de una serie de normas en común:

- I En cada paso de tiempo se lanza una partícula a la red, que caerá de forma equiprobable en cualquiera de las celdas que la forman.
- II Si la partícula lanzada cae sobre una celda vacía, pasará a ocuparla:
 - a) Si la celda vacía sobre la que cae la partícula no está en contacto con ninguna celda ocupada, la nueva partícula se identificará como un *empresario* y originará una nueva empresa.
 - b) Si la celda sobre la que cae la partícula es vecina cercana de *una* celda ocupada, la nueva partícula pasará a formar parte de la misma empresa que dicha celda, convirtiéndose en este caso en lo que llamamos un *trabajador*.
- III Si la partícula lanzada cae sobre una celda ocupada:
 - a) Si cae sobre un trabajador no tendrá ningún efecto sobre el sistema.
 - b) Si cae sobre un empresario, destruirá toda su empresa (es decir, todo el cúmulo al que pertenece el empresario).

La diferencia entre ambas versiones del modelo (amistosa y agresiva) viene dada por el comportamiento cuando la nueva partícula cae sobre una celda no ocupada que es vecina cercana de más de una empresa:

- a) Si nos encontramos en la **versión amistosa** las empresas se unirán, manteniendo todos los empresarios de cada una de ellas su estatus de empresario.
- b) Si nos encontramos en la **versión agresiva** las empresas se unirán, pero solo uno de los empresarios (elegido aleatoriamente) mantendrá su posición, pasando el resto de ellos a ser trabajadores de la empresa.

En el modelo amistoso podemos entender el contacto entre empresas como una fusión amistosa entre las mismas, en la que los empresarios de cada una de ellas siguen manteniendo su posición dentro de un “consejo de dirección” formado por varios jefes o directores., como se observa en la Figura 4.

En el modelo agresivo podemos entender el contacto entre empresas como una absorción, en el que únicamente uno de los empresarios mantendrá su posición, mientras que el resto pasarán a ser trabajadores, como se observa en la Figura 5.

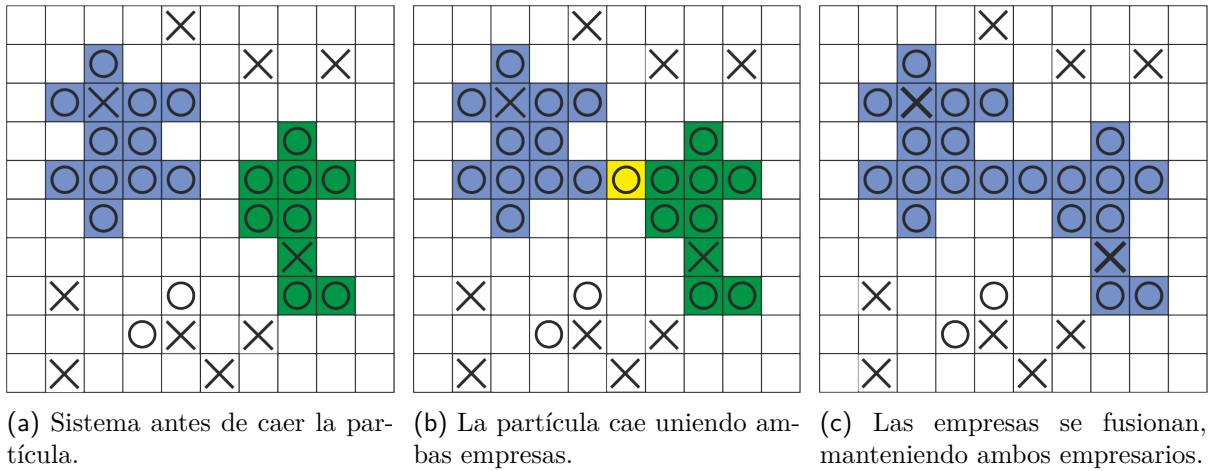


Figura 4: Unión de empresas en la versión amistosa. Los círculos representan trabajadores y las cruces empresarios. En amarillo se muestra la nueva partícula que ha llegado a la malla y que, en este caso, provoca la unión de dos empresas (coloreadas en azul y verde, respectivamente)

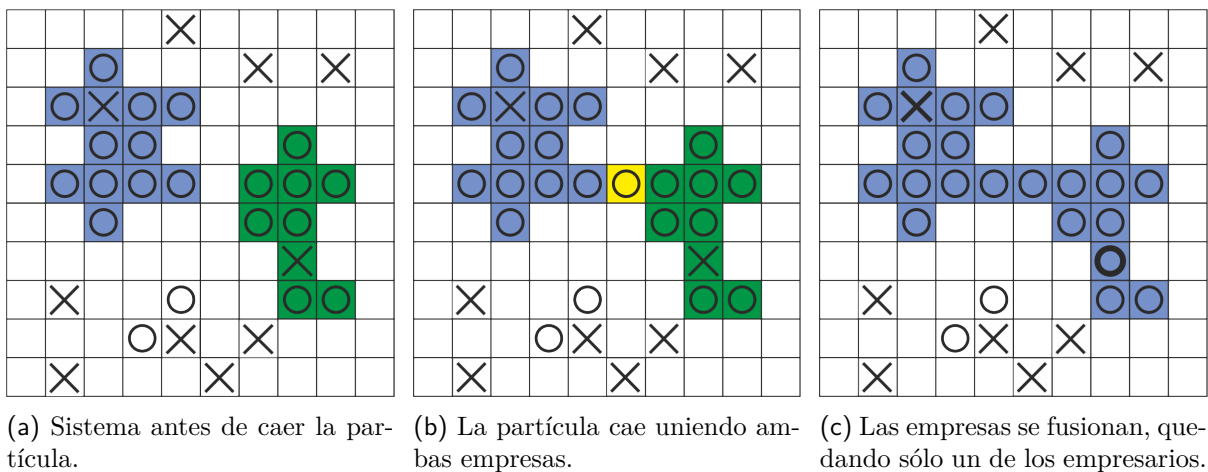


Figura 5: Unión de empresas en la versión agresiva. La única diferencia con la versión amistosa mostrada en la Fig. 4 es que, en la versión agresiva, al producirse la unión de las dos empresas, solo uno de los empresarios continúa como tal (cruz en negrita), mientras que el otro se convierte en un trabajador (círculo en negrita).

En esta segunda versión del modelo se disminuye la posibilidad de que se destruya una empresa al hacer que una única partícula sea la que pueda causar la destrucción de la empresa: la destrucción se da cuando la nueva partícula lanzada cae sobre un empresario de una empresa. Luego, si mantenemos un único empresario en la empresa, la probabilidad de que la partícula caiga sobre esa única celda será mucho menor que en la versión amistosa, donde hay muchos más empresarios en cada empresa (al mantener todos ellos su función tras cada unión). Por ello la probabilidad de que se formen empresas grandes en la red es mucho mayor en la versión agresiva que en la amistosa, lo cual repercutirá en la criticidad de los sistemas (ésto se discutirá con más detalle posteriormente, cuando mostremos los resultados del modelo).

Además de plantear dos versiones diferentes para el modelo (fusión amistosa y absorción) estudiamos también su comportamiento al variar la dimensionalidad y la topología de la malla subyacente. En concreto, en este trabajo hemos planteado el modelo en una dimensión (entendiendo el sistema como un anillo), en dos dimensiones (entendiendo el sistema como una malla 2D, como se planteaba el modelo de incendios forestales), en tres dimensiones (entendiendo el sistema como una red cúbica) y como una red de Bethe. Este último caso lo hemos planteado como un ejemplo de una red de dimensión infinita (K. Christensen, 2002).

El hecho de variar la dimensionalidad y la topología del modelo planteó el problema de identificar y contar los diferentes cúmulos que coexisten en la malla en un momento dado de la simulación. Resolvimos este problema empleando el algoritmo de Hoshen-Kopelman generalizado, tal y como se explica en el Anexo A.

Cabe destacar que anteriormente se han estudiado modelos de dinámica de empresas, como los recogidos por de Wit en su artículo (de Wit, 2005). En los modelos revisados por este autor se obtienen diferentes tipos de distribuciones tamaño-frecuencia de empresas, siendo la log-normal y diferentes variantes de leyes potencias (como la distribución de Yule o la distribución de Pareto) las más comunes, aunque estudios más recientes de los datos empíricos parecen indicar que la distribución observada en casos reales es del tipo ley de potencias. Esto se analizará con más detalle en el apartado 4.

Entre los modelos revisados por de Wit hay tanto modelos continuos como discretos y, en ambos casos, los supuestos planteados para simular la evolución de las empresas son diversos, quedando patente que se trata de una línea de investigación activa (el artículo de de Wit ha sido citado 106 veces según Google Scholar) y de gran relevancia práctica en economía.

El punto en común que comparten la mayoría de los modelos que revisa de Wit en su artículo es la llamada suposición de Gibrat (1932), que dice que la tasa de crecimiento de una empresa es independiente al tamaño de la misma. Este supuesto es compatible con el FDM ya que el crecimiento de una empresa va a ser siempre el mismo, un individuo por cada paso de tiempo si la partícula cae en contacto con una empresa, independientemente del tamaño de dicha empresa (excluyendo los fenómenos de fusión o absorción de empresas).

3. Resultados

Con las reglas descritas anteriormente simulamos el modelo en diferentes mallas acumulando las estadísticas del tamaño de las empresas que se encuentran en la red en cada paso de tiempo, siempre que haya algún evento que modifique alguna de las empresas: si se crea una empresa, si se añade un trabajador a una de las empresas existentes, si se fusionan varias empresas o si se produce la destrucción de una de ellas. Si en un paso de tiempo la partícula lanzada cae sobre un trabajador, ésta no tiene ningún efecto sobre el sistema, luego en ese paso de tiempo no se actualizan las estadísticas de las empresas en la red. Además, en cada momento se lleva un contador para saber el grado de ocupación de la malla, a fin poder evaluar de manera cualitativa el comportamiento del sistema y el tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario.

De este modo, a continuación presentamos los resultados más relevantes mediante dos tipos de gráficos: el gráfico de ocupación, en el que se representa la ocupación del sistema frente al tiempo; y el gráfico tamaño-frecuencia de las empresas, en el que se representa, en escala logarítmica ambos ejes, la frecuencia de cada tamaño de empresa. En todos los casos en los que el sistema tiene un comportamiento crítico o supercrítico y es posible distinguir en el gráfico tamaño-frecuencia una región que sigue una ley de potencias se ha estimado la pendiente de dicha región mediante un método de máxima verosimilitud que se describe en el Anexo B.

Nótese que, a diferencia del modelo de incendios forestales, donde se estudia la estadística de cúmulos de árboles quemados (elementos que han abandonado la malla) en el FDM realizaremos la estadística sobre las empresas que están presentes en la red, siendo éstas el dato de interés al comparar nuestros resultados con los datos reales.

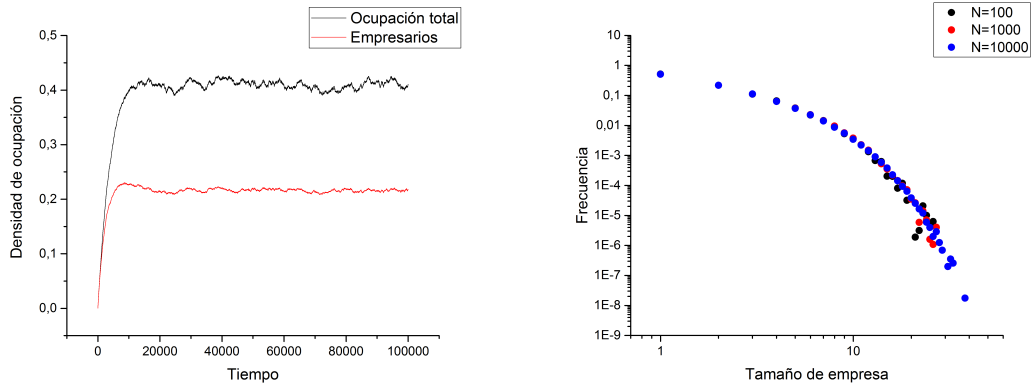
3.1. Modelo unidimensional

En este caso planteamos el sistema en una dimensión, como una cadena lineal en la que cada celda tiene únicamente dos vecinos, sobre la cual aplicamos condiciones de periodicidad, es decir, las celdas inicial y final de la cadena están conectadas, pudiendo entender así la cadena como un anillo.

3.1.1. Versión amistosa

Los resultados obtenidos para esta variante del modelo son los que se muestran en la Figura 6.

Como puede observarse en la Figura 6a el modelo en esta variante alcanza un estado estacionario pasado cierto tiempo (unos 10000 pasos temporales en el caso $N = 10000$) y el tamaño máximo de empresa observado en la red (que en este caso resulta ser de 38) es muy inferior al número total de celdas en la red. Por tanto, podemos afirmar que se trata de un modelo subcrítico que no exhibe comportamiento de tipo ley de potencias en ninguna región de la distribución tamaño-frecuencia.

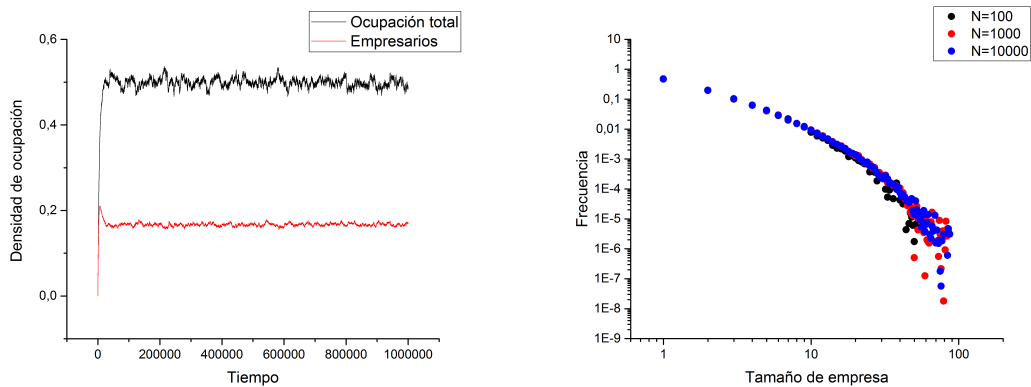


(a) Evolución temporal de la ocupación de la red para un sistema de $N = 10000$ elementos. (b) Distribución tamaño-frecuencia para tres tamaños de red diferentes: $N = 100, 1000$ y 10000 .

Figura 6: Resultados obtenidos para la versión amistosa del FDM unidimensional.

3.1.2. Versión agresiva

En este caso los resultados obtenidos son los que se muestran en la Figura 7.



(a) Evolución temporal de la ocupación de la red para un sistema de $N = 10000$ elementos. (b) Distribución tamaño-frecuencia para tres tamaños de red diferentes: $N = 100, 1000$ y 10000 .

Figura 7: Resultados obtenidos para la versión agresiva del FDM unidimensional.

El modelo, igual que en la versión amistosa, es subcrítico por lo que no presenta leyes de potencia en ninguna región de la distribución tamaño-frecuencia. Sin embargo, se pueden observar diferencias entre ambas versiones del modelo ya que el tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario en la versión agresiva es mucho mayor que en la versión amistosa (presentando además mayores fluctuaciones una vez alcanzado dicho estado). Asimismo, comparando la ocupación total frente a la ocupación de empresarios en la red vemos que en el caso amistoso los empresarios suponen un porcentaje mucho mayor respecto a la ocupación total (se puede ver en la Figura 6 que es aproximadamente un 50%) frente a la versión agresiva. Si recordamos

las normas que rigen las dos versiones del modelo parece razonable que esto ocurra, ya que en la versión agresiva tiende a haber una menor cantidad de empresarios al desaparecer alguno de ellos cada vez que se da una fusión entre empresas.

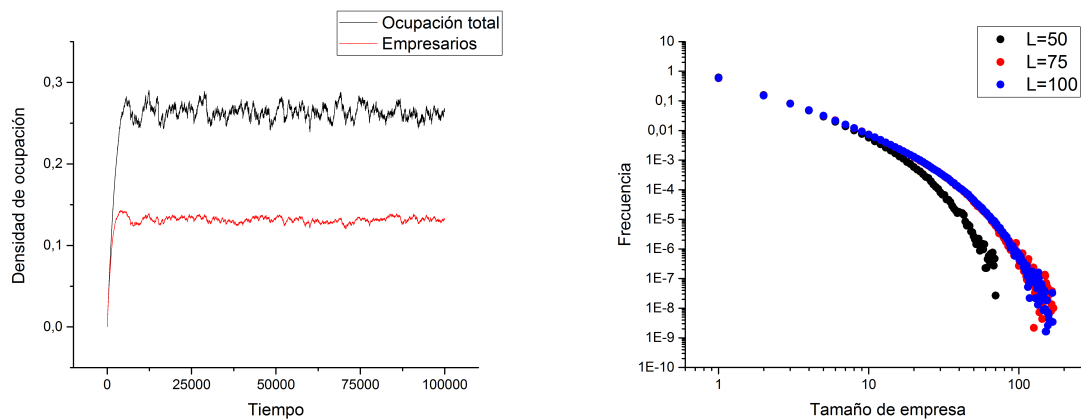
3.2. Modelo bidimensional

Al aumentar la dimensionalidad del modelo las celdas pasan a estar en contacto con cuatro vecinos, pero en este caso no aplicamos condiciones de periodicidad: las celdas que estén en los extremos de la red no estarán en contacto con celdas en los lados correspondientes al final de la red.

3.2.1. Versión amistosa

Los resultados para la variante amistosa del modelo 2D son los mostrados en la Figura 8.

De la misma forma que ocurría en el modelo unidimensional, se puede ver en la Figura que el sistema alcanza un estado estacionario y que el tamaño máximo de empresa observado es muy inferior al tamaño total de la red, por lo que el modelo también es subcrítico en esta variante. Además, comparando las Figuras 6a y 8a se observa que el estado estacionario en el modelo bidimensional corresponde a una ocupación de la red mucho menor que en el caso unidimensional.

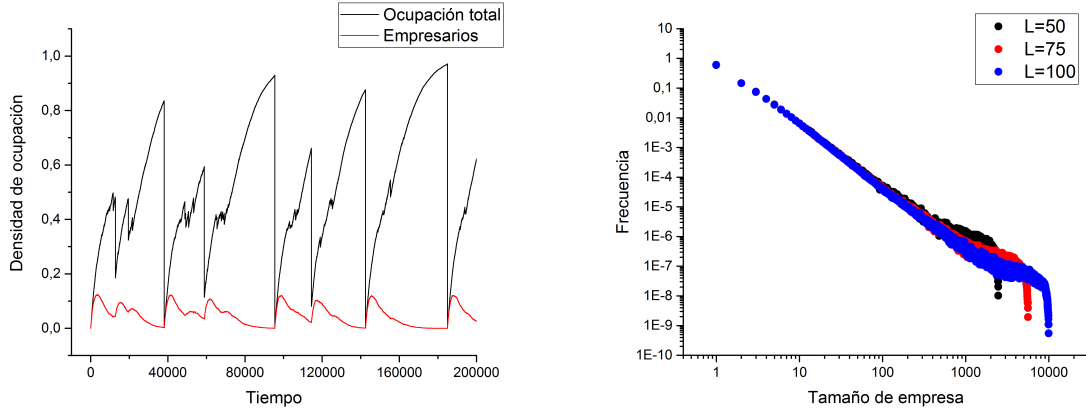


(a) Evolución temporal de la ocupación de la red para una malla 100x100. (b) Distribución tamaño-frecuencia para tres tamaños de red diferentes: $L = 50, 75$ y 100 .

Figura 8: Resultados obtenidos para la versión amistosa del FDM bidimensional.

3.2.2. Versión agresiva

Al estudiar el modelo 2D en esta versión observamos un cambio en la criticidad del sistema, como puede verse en la Figura 9.



(a) Evolución temporal de la ocupación de la red para una malla 100x100. (b) Distribución tamaño-frecuencia para tres tamaños de red diferentes: $L = 50, 75$ y 100 .

Figura 9: Resultados obtenidos para la versión agresiva del FDM bidimensional.

El modelo en esta versión presenta diferencias significativas respecto al resto. Si analizamos la evolución temporal de la ocupación en la red se observan ciclos de vaciado y llenado, los cuales, atendiendo a la evolución de empresarios en la red, corresponden a la formación de una gran empresa que ocupa casi la totalidad de la red (los picos en la densidad de ocupación alcanzan casi el valor de 1) y que al desaparecer vacía la red casi por completo, iniciándose de nuevo el llenado de la red. En la distribución de empresas por tamaño se observa la aparición de una ley de potencias y el tamaño máximo de empresa observado sí coincide con el tamaño máximo de la red. De esta forma, podemos afirmar que el modelo en esta versión es supercrítico.

Lado de la red	α
50	$-2,115 \pm 0,015$
75	$-2,157 \pm 0,010$
100	$-2,182 \pm 0,012$
125	$-2,200 \pm 0,009$
150	$-2,179 \pm 0,014$
200	$-2,185 \pm 0,009$

Tabla 1: Pendiente en la “región ley de potencias” para distintos tamaños de red en el modelo 2D agresivo.

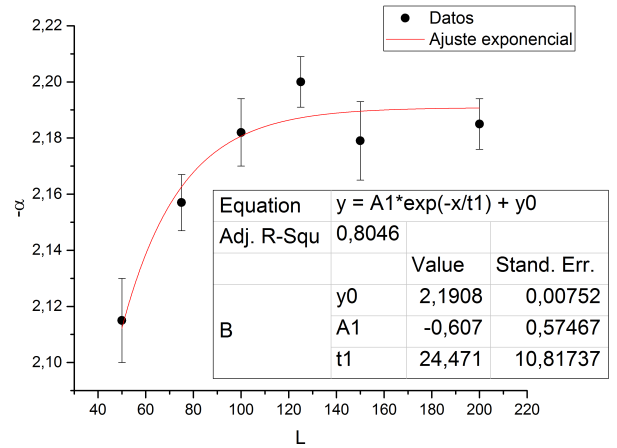


Figura 10: Representación gráfica de los datos de la Tabla 1 y su ajuste exponencial.

Los resultados recogidos en la Figura 9b corresponden a los tamaños de red indicados, pero simulando el modelo en redes de distinto tamaño y calculando las pendientes en la región que sigue una ley de potencias con el método explicado en el Anexo B obtenemos los resultados recogidos en la Tabla 1 y la Figura 10.

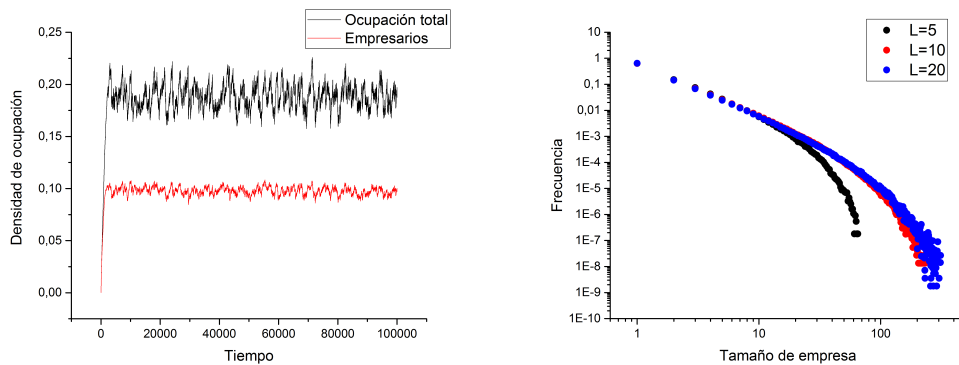
Como se puede ver en la Figura 10 la tendencia del modelo es a aumentar la pendiente de la región que sigue una ley de potencias conforme aumenta el tamaño de la red hasta alcanzar un tamaño máximo a partir del cual la pendiente no seguirá aumentando. Según el ajuste realizado ese valor máximo que alcanzará la pendiente es $\alpha = -2,191 \pm 0,007$.

3.3. Modelo tridimensional

En este caso cada celda está en contacto con 6 celdas vecinas, pero igual que en el modelo 2D no aplicamos condiciones de periodicidad en los extremos, por lo que las celdas correspondientes a los lados de la red no tendrán celdas en sus lados que correspondan al límite de la misma.

3.3.1. Versión amistosa

En el caso del modelo 3D, los resultados obtenidos para la variante amistosa son los que se muestran en la Figura 11.



(a) Evolución temporal de la ocupación de la red para una red 20x20x20. (b) Distribución tamaño-frecuencia para tres tamaños de red diferentes: $L = 5, 10$ y 20 .

Figura 11: Resultados obtenidos para la versión amistosa del FDM tridimensional.

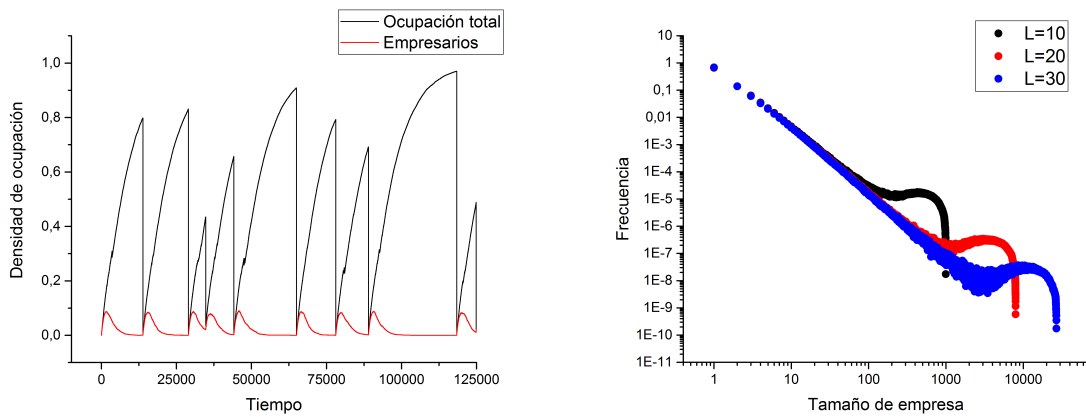
Queda claro en la Figura que el modelo en su versión amistosa también es subcrítico en una red tridimensional, aunque comparando la Figura 11b con los resultados anteriores (Figuras 6b y 8b) se puede observar cómo al aumentar la dimensionalidad aparece gradualmente una región en la distribución de empresas por tamaño que sí sigue una ley de potencias, aunque se siguen sin observar empresas que ocupen la totalidad de la red.

Además, comparando la Figura 11a con las Figuras 6a y 8a puede verse como de nuevo al aumentar la dimensionalidad del modelo disminuye la ocupación de la red en el estado estacionario: en el modelo unidimensional se da en una densidad de ocupación de 0.4, en el modelo

bidimensional la densidad se reduce a 0.25 y en el modelo tridimensional es de 0.2 (aunque presenta fluctuaciones más caóticas en torno al valor medio). También cabe destacar cómo en todos los casos mencionados anteriormente la ocupación correspondiente a empresarios en la red es aproximadamente la mitad de la ocupación total, lo cual concuerda con las distribuciones de empresas por tamaño que se dan en estos modelos, en las que casi la totalidad de las empresas que se observan son de muy pequeño tamaño.

3.3.2. Versión agresiva

Los resultados obtenidos para la variante agresiva del modelo tridimensional son los recogidos en la Figura 12.



(a) Evolución temporal de la ocupación de la red para una red 20x20x20. (b) Distribución tamaño-frecuencia para tres tamaños de red diferentes: $L = 10, 20$ y 30 .

Figura 12: Resultados obtenidos para la versión agresiva del FDM tridimensional.

Igual que ocurría en el modelo bidimensional, la versión agresiva del modelo 3D resulta ser supercrítica, presentando picos en la ocupación de la red correspondientes a empresas que llegan a ocupar casi por completo la red. Si analizamos en detalle las Figuras 9a y 12a comparando sus escalas de tiempo se puede ver cómo los ciclos de vaciado y llenado son mucho más rápidos en el modelo 3D que en el modelo 2D, es decir, resulta más fácil para una empresa expandirse y ocupar un porcentaje mayor del espacio disponible si la conectividad de la red es mayor.

Los resultados mostrados en la Figura 12b corresponden a los tamaños de red indicados. Simulando el modelo en redes de diferentes tamaños y analizando los datos recogidos de la misma forma que se indicó anteriormente obtenemos los resultados incluidos en la Tabla 2 y la Figura 13.

De la misma forma que se observaba en el modelo bidimensional, la tendencia que se sigue es la de aumentar la pendiente en la región que sigue una ley de potencias hasta alcanzar una cota máxima, que en este caso resulta ser, según el ajuste (en el que no se ha introducido el dato correspondiente a un tamaño $L = 100$ por desviarse demasiado de la tendencia general), $\alpha = -2,458 \pm 0,010$, es decir, mucho mayor en módulo que la pendiente máxima observada en el modelo 2D.

Lado de la red	α
5	$-2,025 \pm 0,005$
10	$-2,294 \pm 0,008$
15	$-2,363 \pm 0,005$
20	$-2,422 \pm 0,006$
25	$-2,423 \pm 0,007$
30	$-2,431 \pm 0,003$
40	$-2,456 \pm 0,014$
50	$-2,483 \pm 0,005$
75 [†]	$-2,474 \pm 0,008$
100 [†]	$-2,431 \pm 0,010$

Tabla 2: Pendiente en la “región ley de potencias” para distintos tamaños de red en el modelo 3D agresivo.

†: Datos obtenidos en el Centro de Supercomputación de Aragón.

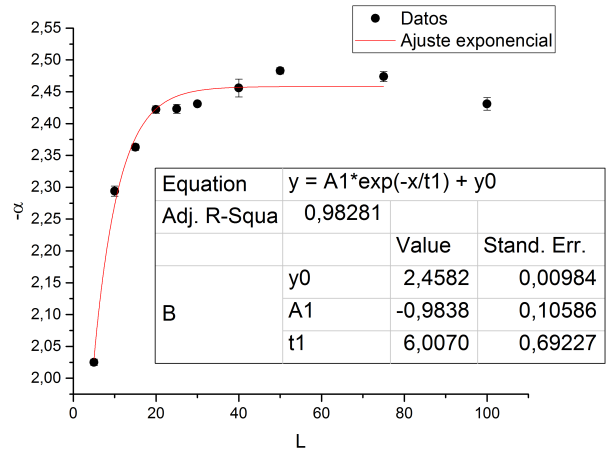


Figura 13: Representación gráfica de los datos de la Tabla 2 y su ajuste exponencial.

3.4. Modelo en la red de Bethe

Como ya hemos adelantado en el apartado 2 introducimos esta versión del modelo como un ejemplo de red con dimensionalidad infinita, como explica Christensen (2002). La red se crea colocando un único nodo (denominado *nodo raíz*) en el centro y conectándolo a un número Z de vecinos, donde Z es el denominado *número de coordinación*.

La red se construye por capas: el nodo raíz es la capa cero (y contiene un solo elemento), luego le sigue la capa 1 formada por Z elementos, cada uno de los cuales se une con $C = Z - 1$ elementos en la capa 2 y así sucesivamente, como muestra la Figura 14. La capa k está formada por $N_k = Z(Z - 1)^{k-1}$ elementos.

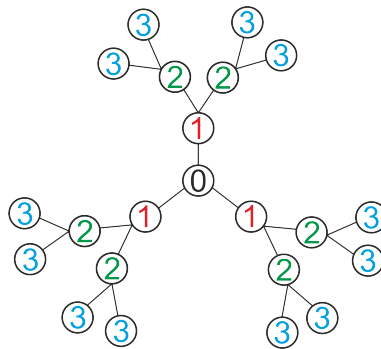


Figura 14: Red de Bethe con $Z = 3$ y $K = 3$. Cada nodo está etiquetado con el número de capa al que pertenece.

El parámetro C se puede ver como el número de enlaces que un elemento en la capa k establece con otro elemento en la capa $k+1$ y, en ocasiones, recibe también el nombre de número de coordinación, por lo que hay que tener cuidado con la nomenclatura. Por tanto, una red de Bethe queda definida por dos parámetros: el número de coordinación Z y el número de capas K . La red de Bethe representada en la figura 14 tiene como parámetros $Z = 3$ y $K = 3$. Los elementos de la última capa, que se denominan hojas, son especiales ya que solo están enlazados con un elemento de la red (como los elementos de la capa 3 en la Figura 14).

El número total de elementos en una red de Bethe (Z, K) es de:

$$N = \sum_{k=1}^K Z(Z-1)^{k-1} + 1$$

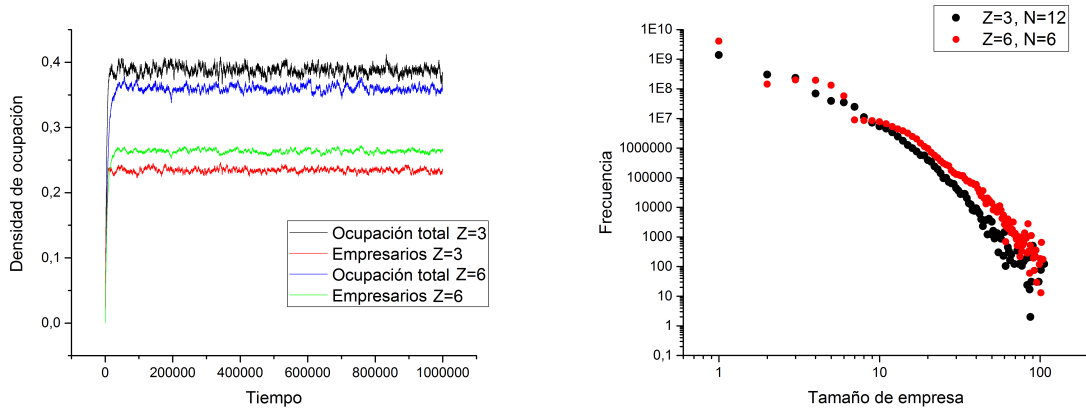
de los cuales $Z(Z-1)^{K-1}$ son hojas y el resto *nodos internos*.

La creación de esta red no resulta tan trivial como en casos anteriores, así que tuvimos que desarrollar un método que nos asegurara que la red se creaba correctamente. Dicho método se describe en el Anexo C.

En nuestro caso las simulaciones se han realizado para las redes con números de coordinación 3 y 6: el caso $Z = 3$ por ser el paradigma de estas redes y el caso $Z = 6$ por ser el caso en el que la conectividad es igual que en el modelo 3D (cada nodo está conectado a 6 vecinos diferentes).

3.4.1. Versión amistosa

Los resultados para esta versión de nuestro modelo son los que se muestran en la Figura 15.



(a) Evolución temporal de la ocupación de la red.

(b) Distribución tamaño-frecuencia.

Figura 15: Resultados obtenidos para la versión amistosa del FDM en las redes de Bethe con $Z = 3$ y $Z = 6$.

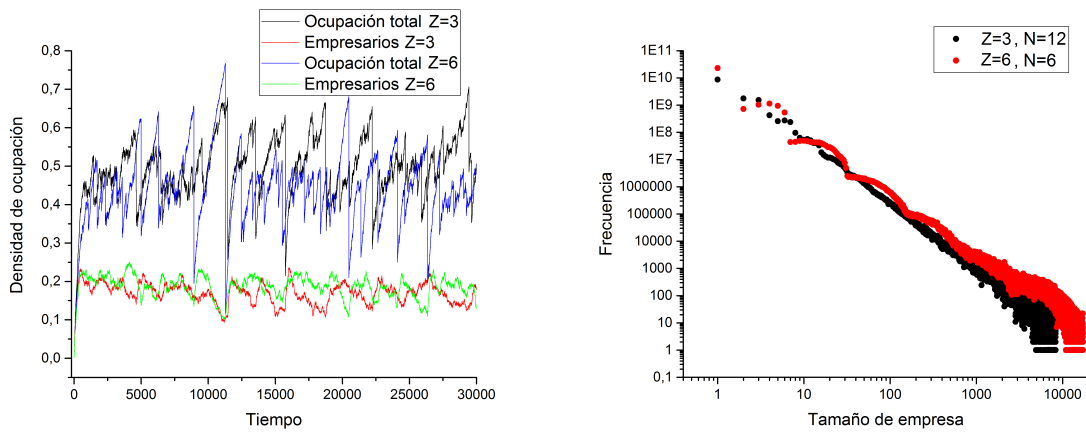
Estudiando la evolución temporal de la ocupación en la Figura 15 parece claro que el modelo en esta variante es subcrítico. Esto también se pone de manifiesto en el tamaño máximo de

empresa alcanzado en la red, que es muy inferior al número total de celdas en la red.

La gran diferencia entre estos resultados y los observados anteriormente es que ya no se observa una región lineal en la distribución tamaño-frecuencia, sino que se ven pequeñas oscilaciones en los valores. Si se estudian estas oscilaciones con más detenimiento se ve que el número de puntos que las forman coincide con el número de vecinos de cada nodo, Z , es decir, esas oscilaciones ponen de manifiesto que la estructura que tiene más tendencia a formarse es la de un nodo conectado a sus vecinos más próximos (cada nodo conectado a C vecinos), exceptuando el caso de empresarios aislados, que siempre va a ser el caso más probable. Este fenómeno se observa de forma aún más clara en la variante agresiva de este modelo.

3.4.2. Versión agresiva

En este caso los resultados son los recogidos en la Figura 16.



(a) Evolución temporal de la ocupación de la red.

(b) Distribución tamaño-frecuencia.

Figura 16: Resultados obtenidos para la versión agresiva del FDM en las redes de Bethe con $Z = 3$ y $Z = 6$.

Atendiendo a los ciclos de vaciado y llenado que se observan en la Figura 16a y el hecho de que en la Figura 16b se observa el efecto de borde de la red se podría decir que el modelo es supercrítico, pero igual que en la versión amistosa del modelo en la red de Bethe, en la distribución tamaño-frecuencia de esta variante se observan oscilaciones correspondientes al llenado del conjunto de un nodo y sus C vecinos más próximos.

Sin embargo sí se puede apreciar una cierta tendencia lineal en regiones intermedias de la distribución tamaño-frecuencia (como en el caso $Z = 3$ de la Figura 16b), pero al realizar el ajuste con el método de máxima verosimilitud obtuvimos pendientes de un valor aproximado $\alpha = -2,50$, el cual se sale del rango de interés al compararlo con los resultados de los datos reales, como se verá en el siguiente apartado.

4. Estadística de empresa en casos reales

Para comprobar los resultados del modelo hemos recopilado, para cuatro países diferentes (España, Reino Unido, Suecia y Estados Unidos), estadísticas sobre el número de empresas y su tamaño, entendiendo por “tamaño” el número de trabajadores en cada una de ellas. Estas estadísticas, accesibles a través de Internet, se ofrecen en forma de histogramas tamaño-frecuencia con una anchura variable del bin (por ejemplo, 1-4, 5-9, 10-49, 50-99, 100-250 y más de 250 trabajadores), por lo que su tratamiento estadístico es diferente al de los resultados de las simulaciones, donde tenemos la frecuencia de cada tamaño de empresa (dicho de otro modo, la anchura del “bin” en las simulaciones es siempre de 1).

Cada país proporciona los datos con un número diferente de categorías (entre 8 y 12) y con categorías de diferente anchura, por lo que antes de representar gráficamente los datos en forma de histograma hay que normalizar las frecuencias dividiendo para la anchura de cada categoría. Solo de esa manera obtendremos una distribución de tipo ley de potencias razonable. Esto es lo que se ha hecho en la Figura 17 para los cuatro países de los que se han conseguido datos de calidad.

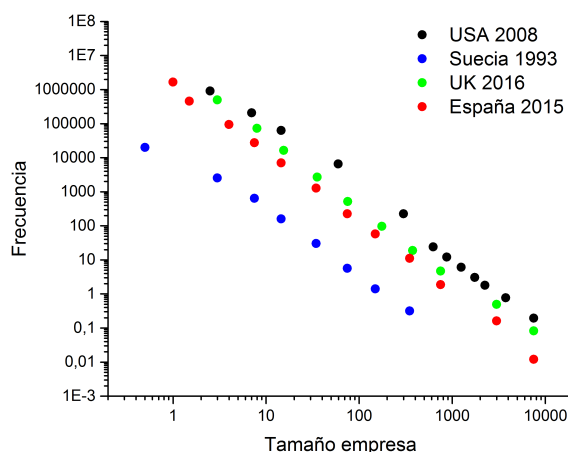


Figura 17: Distribuciones tamaño-frecuencia de empresas en diferentes países y años.

Las fuentes de información para las estadísticas de cada uno de los países son las siguientes:

- España: Instituto Nacional de Estadística [<http://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=299&L=0>] y Diario Expansión, por Miguel Ángel Patiño, Paula Gazpio y Mikel Garralda. Madrid. Actualizado: 11/09/2015 23:20 horas].
- Reino Unido: UK Business Counts – Enterprises, Office for National Statistics (ONS) [a través de Nomis, official labour statistics, <https://www.nomisweb.co.uk/>].
- Suecia: Johansson, Dan (1997) : The Number and the Size Distribution of Firms in Sweden and Other European Countries, IUI Working Paper, No. 483 [descargable online en <http://hdl.handle.net/10419/95067>].

- Estados Unidos: United States Census Bureau, <http://www.census.gov/epcd/susb/latest/us/US--.HTM>.

Como puede observarse en la Figura 17, los datos siguen una tendencia lineal en una gráfica doble logarítmica, por lo que podemos aplicar el método de máxima verosimilitud (adaptado a distribuciones de datos agrupados en bines, como explican Virkar y Clauset, 2014), obteniendo los resultados recogidos en la Tabla 3.

País (año)	α
USA (2008)	$-1,99 \pm 0,12$
Suecia (1993)	$-2,16 \pm 0,11$
UK (2016)	$-1,95 \pm 0,13$
España (2015)	$-2,18 \pm 0,16$

Tabla 3: Ajuste por MLE de los datos mostrados en la Figura 17.

Se observa que el exponente de la distribución es muy similar en todos los casos, siendo compatible con un valor de $\alpha = -2$ dentro de la incertidumbre derivada de la agregación de los datos en categorías, aunque la media del exponente para los cuatro países es algo mayor de 2, $\alpha = -2,07 \pm 0,13$. Este valor será importante cuando comparemos los datos reales con los resultados de las simulaciones, en el siguiente apartado.

La aparición de leyes de potencias en distribuciones tamaño-frecuencia de empresas es un fenómeno que ya se había observado anteriormente, siendo Simon y Bonini (1958) los primeros en analizar este comportamiento. En dicho artículo sus autores descartan teorías anteriores sobre la posibilidad de que los datos empíricos sigan distribuciones log-normal. Posteriormente, Axtell (2002) confirmó que dicho comportamiento se cumplía en la distribución tamaño-frecuencia de empresas en USA, obteniendo además una pendiente en la distribución de $\alpha = 2,059 \pm 0,054$, valor que coincide con los resultados obtenidos en nuestro análisis.

Sin embargo, no todos los autores que han analizado datos del tamaño de las empresas en una economía han llegado a la misma conclusión. Al igual que entre los modelos, como se ha comentado ya en el apartado 2, se observa una dicotomía entre aquellos autores que obtienen leyes de potencias y los que obtienen distribuciones de tipo log-normal. Aunque parezca extraño que puedan darse discrepancias tan grandes al analizar unos datos empíricos (no hay que olvidar que la forma de una distribución potencial y de una log-normal es claramente diferente), la enorme cantidad de datos de los que se dispone y los diferentes niveles de agregación con los que cada autor trabaja pueden, en parte, explicar estas diferencias. De hecho, existen autores que, al analizar los datos, observan una distribución log-normal con una cola extendida de tipo ley de potencias (e.g., Growiec et al., 2008). Como el máximo de la distribución log-normal se localiza siempre en la zona de empresas muy pequeñas, aquellos trabajos que usan solo empresas de tamaño mediano y grande solo observan una región que puede aproximarse tanto a una ley de potencias como a una log-normal. Sin embargo, nosotros hemos usado todos los tamaños de empresas, desde 1 hasta las de mayor tamaño, y en todos los casos analizados hemos encontrado comportamientos de tipo ley de potencias en todo el rango de tamaños de empresas, sin observar en ningún momento el máximo que caracteriza a la distribución log-normal.

5. Discusión

A la vista de los resultados observados al estudiar los datos reales la de distribución de empresas por tamaño en diferentes países cabría preguntarse si los resultados obtenidos en nuestro modelo se podrían corresponder con ellos. En los diferentes países mencionados anteriormente los datos siguen una ley de potencia, igual que lo hacían en algunas de las variantes de nuestro modelo, sobre todo las agresivas, pero sin presentar el efecto de borde que sí presentan muchos nuestros resultados que implican un comportamiento supercrítico.

Para explicar esta diferencia hay que preguntarse primero a qué se corresponde el tamaño de las redes de nuestras simulaciones al compararlos con los datos reales, ya que en nuestras simulaciones existían empresas que llegaban a ocupar el 100 % del tamaño disponible en la red. Esto demuestra que el tamaño de la red que simulamos no puede ser la población de un país, ya que no tendría sentido hablar de una empresa en la que trabajara toda la población de una comunidad, al haber miembros que no pueden hacerlo legalmente.

Un posible equivalente entre el tamaño de la red simulada en nuestro modelo y un caso real sería decir que el tamaño de la red corresponde a la población activa de un país. Sin embargo, atendiendo a la fracción de ocupación media de la red que se observa en nuestros modelos (que suele encontrarse entre el 50 y el 60 %) parece más correcto que asociemos el tamaño de la red de nuestro modelo a la población de un país en edad legal para trabajar, edad que en España se sitúa en los 16 años y que incluye también a los jubilados. Por ejemplo en 2016 en España el porcentaje de actividad (cociente entre la población activa y población mayor de 16 años) era del 58.95 % y en el periodo 2002-2016 osciló entre el 54 % y el 60.5 % (INE, [/www.ine.es/inebmenu/indice.htm](http://www.ine.es/inebmenu/indice.htm), encuestas de población activa), muy similar a la ocupación media de nuestras redes (fracción del número de celdas total ocupado por trabajadores o empresarios).

Otra posibilidad que nos planteamos para el significado del tamaño de la red simulada al trasladarla a la realidad fue que las celdas disponibles en la red representaran únicamente la población activa, ya que es el equivalente directo a lo que hemos definido como celdas de la red: individuos que pueden pasar a ser nuevos empresarios o trabajadores de una empresa. Sin embargo, como ya se ha mencionado, la ocupación media de las redes oscila en torno al 60 % lo cual, si la red representara la población activa de un país, equivaldría a una tasa de paro media del 40 %, valor que no es realista. Es por ello que el equivalente al tamaño de la red parece corresponderse mejor la población en edad de trabajar de un país, al relacionar nuestros resultados con los datos reales.

Aceptando esta equivalencia entre el tamaño de una red simulada y los casos reales queda explicado por qué no se observa el efecto de borde en las distribuciones tamaño-frecuencia en los datos reales. Tomemos por ejemplo la empresa más grande en Estados Unidos, *Walmart*, que cuenta con un total de 2.2 millones de empleados (USA Today, <https://www.usatoday.com/story/money/business/2013/08/22/ten-largest-employers/2680249/>, consultada online en mayo 2017). Este tamaño de empresa supone menos de un 1 % en la población cuya en edad legal para trabajar (Federal Reserve Economic Data, <https://fred.stlouisfed.org/series/LFWA64TTUSM647S>, consultada online en mayo 2017). Una empresa cuyo tamaño fuera menor al 1 % del tamaño total de la red de nuestros modelos se sitúa dentro de la zona con

comportamiento de tipo ley de potencias, a la izquierda del comienzo de la zona supercrítica, como se observa en la Figura 18, lo cual explica la ausencia de comportamientos supercríticos en los casos reales.

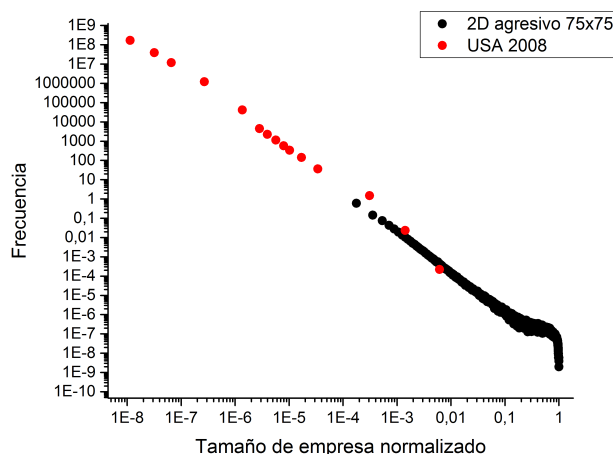


Figura 18: Comparación entre los datos correspondientes a USA en 2008 y los datos obtenidos para el modelo 2D en la versión agresiva con una red 75x75. Los tamaños de empresa se han normalizado dividiendo cada valor entre la población en edad legal para trabajar en el caso de los datos de USA y entre el tamaño total de la red (5625) en los datos del FDM.

Para una mejor visualización de los resultados en la Figura 18 se incluyen los datos correspondientes a las empresas de mayor tamaño en USA (los tres últimos puntos de dicha distribución), mientras que en la Figura 17 se han descartado para realizar el ajuste mediante el método de máxima verosimilitud al desviarse de la tendencia de ley de potencias que sigue el resto. Sin embargo, lo que sí queda claro en la Figura 18 es que la equivalencia entre el tamaño de la red simulada y la población en edad legal para trabajar en un país podría ser correcta, ya que justifica la ausencia de efecto de borde en las distribuciones obtenidas para datos reales.

Una vez establecida esta equivalencia podemos pasar a estudiar cuál de las variantes de nuestro modelo se ajusta mejor a los datos reales, en cuanto a la pendiente de la región ley de potencias se refiere. Para ello se recogen en la Tabla 4 todos los datos obtenidos a lo largo del trabajo.

A la vista de los resultados obtenidos la versión de nuestro modelo que más parece aproximarse a los datos reales es la bidimensional agresiva. Parece establecerse así una semejanza entre el FDM y el modelo de incendios forestales y es que la dimensión más adecuada para realizar las simulaciones de ambos es dos. Mientras que en el caso de incendios forestales este hecho concuerda con la propia forma de un bosque, sobre el cual parece una buena aproximación la de una malla 2D sobre la que crecen árboles, en dinámica de empresas, como se indicó en el apartado 1, no hay conocimiento previo sobre la dimensionalidad del sistema.

Modelo	α
Datos reales	$-2,07 \pm 0,13$
1D amistoso	Subcrítico
1D agresivo	Subcrítico
2D amistoso	Subcrítico
2D agresivo	$-2,19 \pm 0,01$
3D amistoso	Subcrítico
3D agresivo	$-2,46 \pm 0,01$
Bethe amistoso	Subcrítico
Bethe agresivo	$< -2,50$

Tabla 4: Resultados del análisis de datos reales de estadística de empresas y datos generados por el FDM. En los modelos con comportamiento subcrítico no es posible realizar un ajuste por máxima verosimilitud. La pendiente escogida para los modelos 2D y 3D en la variante agresiva es la pendiente máxima a la que se tiende en cada uno de ellos.

6. Conclusiones

A la vista del fenómeno de criticidad auto-organizada que parece observarse en la formación de empresas en diferentes países del mundo hemos propuesto un modelo, el *Firm Dynamics Model* (FDM), con el que intentamos reproducir los resultados obtenidos en la dinámica de empresas reales.

Las simulaciones realizadas con el FDM parecen ajustarse a las leyes de potencias observadas en las distribuciones tamaño-frecuencia de las empresas en diferentes países, usando datos de cuatro países distintos (España, USA, UK y Suecia) recopilados por nosotros. Aunque se han planteado diferentes versiones del modelo la que mejor se ajusta a la distribución empírica tamaño-frecuencia de las empresas reales es la variante *agresiva* sobre una malla *bidimensional*. El exponente medio obtenido por nosotros por máxima verosimilitud para las distribuciones tamaño-frecuencia empíricas de los cuatro países analizados (España, USA, UK y Suecia) es de $2,07 \pm 0,13$, mientras que el valor obtenido en la variante agresiva 2D (para mallas grandes) es de $2,19 \pm 0,1$.

Una posible ampliación del trabajo recogido en esta memoria sería aplicar el FDM a redes que se asemejen más a cómo se establecen las relaciones empresariales en el mundo real, usando para ello redes *scale-free* o *small-world*. Otra posible modificación al modelo sería añadir la opción de que las empresas no solo puedan aumentar su tamaño a lo largo del tiempo sino que también lo puedan reducir antes de desaparecer por completo, como se contempla en algunos modelos recogidos por de Wit (2005). Además, en este trabajo solo se ha analizado un observable del modelo: la distribución tamaño-frecuencia de las empresas, pero se podrían estudiar otros observables como el tiempo de supervivencia de una empresa o la tasa de crecimiento o de desaparición de las mismas. Estos datos empíricos también son accesibles y, por tanto, se podría hacer una comparación con los resultados de nuestro modelo.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a Javier Gómez y Amalio Fernández-Pacheco todos sus consejos y su disposición a ayudar ante cualquier problema que ha surgido a lo largo este trabajo. Ha sido un periodo de formación muy valioso para mí y me alegro de haber contado con tan buena ayuda siempre que lo he necesitado.

También quiero agradecer a mi familia (en especial a mis padres), a Maja y a todos mis amigos el apoyo que me han dado todo este tiempo, convirtiendo cada pausa de este trabajo en un momento que ha valido la pena disfrutar. Las pocas líneas que os puedo dedicar no hacen justicia al cariño que he sentido en todo momento.

Por último, agradecer los recursos del supercomputador Cierzo cedidos por el Centro de Supercomputación de Aragón (CESAR), así como la asistencia técnica provista por el BIFI (Universidad de Zaragoza).

Referencias

- Axtell, R. L. (2001) Zipf distribution of US firm sizes. *Science* 293(5536), p. 1818-1820.
- Bak, P., Tang, C. y Wiesenfeld, K. (1987). Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise. *Phys. Rev. Lett.* 59 (4), p. 381.
- Bak, P., Tang, C. y Wiesenfeld, K. (1990). A forest-fire model and some thoughts on turbulence. *Physics letters A* 147 (5-6), p. 297-300.
- Bak, P., y Sneppen, K. (1993). Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution. *Phys. Rev. Lett.* 71 (24), p. 4083.
- Christensen, K. (2002). Percolation theory. Imperial College London, p. 1-2.
- de Wit, G. (2005) Firm size distributions. An overview of steady-state distributions resulting from firm dynamics models. *International Journal of Industrial Organization* 23 (5), p. 423-450.
- Drossel, B. y Schwabl, F. (1992). Self-organized critical forest-fire model. *Phys. Rev. Lett.* 69 (11), p. 1629.
- Gibrat, R. (1931). Les inégalités économiques. Sirey, Paris.
- Growiec, J., Pammolli, F., Riccaboni, M., y Stanley, H. E. (2008). On the size distribution of business firms. *Economics Letters* 98 (2), p. 207-212.
- Johansen, A. (1994). Spatio-temporal self-organization in a model of disease spreading. *Physica D* 78 (3-4), p. 183-193.
- Main, I. (1996). Statistical physics, seismogenesis, and seismic hazard. *Rev. Geophys.* 34, p. 433-462.
- Olami, Z., Feder, H.J.S. y Christensen, K. (1992). Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes. *Phys. Rev. Lett.* 68 (8), p. 1244-1247.
- Simon, H. A. y Bonini, C. P. (1958). The size distribution of business firms. *The American economic review* 48(4), p. 607-617.
- Tejedor, A. , Gómez, J. B. y Fernández-Pacheco, A. (2009). Earthquake size-frequency statistics in a forest-fire model of individual faults. *Physical Review E* 79(4), p. 046102.
- Turcotte, D. L. (1997). *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. Cornell University, New York.
- Virkar, Y., Clauset, A. (2014). Power-law distributions in binned empirical data. *The Annals of Applied Statistics* 8 (1), p. 89-119.
- Von Neumann, J. (1951). The general and logical theory of automata. Jeffress, L.A. (ed.) *Cerebral Mechanisms in Behavior: The Hixon Symposium*. New York: Wiley, p. 1-31.