

TRABAJO FIN DE GRADO:

El bosón de Higgs en el modelo U(1)-Gauge

Autor: Daniel Simón Colomar

Director: Vicente Azcoiti Pérez

Curso 2016/2017

Febrero 2017



Universidad
Zaragoza

Índice

0. Introducción	1
1. Modelo de Ising gauge. Teorema de Elitzur.	2
1.1. Simetrías globales y ruptura espontánea de simetría	2
1.2. Un modelo de Ising con simetría local	3
1.3. Teorema de Elitzur	4
2. Teoría de campos: Conceptos generales	5
3. Cuantificación mediante la integral de camino	7
3.1. Integral de camino y matriz de transferencia del oscilador armónico simple	7
3.2. La integral de camino para teoría de campos	10
4. Simetría global en teoría de campos	11
4.1. Simetría interna discreta	12
4.2. Simetría interna continua. Teorema de Goldstone	14
5. Interacción del fotón con partículas cargadas de espín 0 a partir del principio de invariancia Gauge	17
5.1. Teoría del electromagnetismo de Maxwell	17
5.2. Simetría local en un campo escalar complejo	19
6. El mecanismo de Higgs	21
7. Conclusiones	22
8. Referencias	23

0. Introducción

Las simetrías locales (simetrías gauge) se han manifestado como un principio fundamental de la naturaleza, a partir del cual se ha podido formular el Modelo Estándar de las interacciones entre partículas. Este modelo nos ha proporcionado predicciones teóricas que se ajustan a los resultados experimentales de manera asombrosa.

Sin embargo, asumir las simetrías gauge como principio fundamental de la naturaleza también trae una serie de problemas. La simetría gauge requiere que los bosones gauge (fotón, W^+ , W^- , Z_0 y los 8 gluones) sean partículas sin masa, ya que un término de masas para estos bosones en el Lagrangiano viola la simetría local. De estos 12 bosones, resulta que 3 de ellos (W^+ , W^- y Z_0) son masivos. Por lo tanto, parece imposible conciliar la teoría que tan buenos resultados había dado con el experimento.

El mecanismo de Higgs va a ser la herramienta que nos permitirá conciliar la simetría gauge con el hecho de que existan bosones gauge masivos. Además, los acoplamientos del campo escalar de Higgs con los fermiones (campos de materia) son los que generan la masa de los fermiones.

En este trabajo nos ocuparemos de la generación de masa para los bosones gauge respetando la simetría local, y en particular estudia el modelo U(1)-Higgs que genera dinámicamente una masa para el fotón. Este resultará un caso meramente académico, ya que el fotón no tiene masa, pero contiene todos los ingredientes esenciales del mecanismo de Higgs y es técnicamente algo más sencillo.

En la sección 1 se presentará el concepto de simetría global y el fenómeno de ruptura de simetría en el modelo de Ising clásico. También, se propondrá una variación al mismo para poder introducir la simetría local y el teorema de Elitzur, que postula que una simetría local no puede romperse espontáneamente. En la sección 2 se tratarán conceptos generales de teoría de campos, y en la sección 3 procederemos a la cuantificación de una teoría de campos mediante la integral de camino. Posteriormente, en la sección 4 se estudiará la simetría global en teoría de campos, y se verá el fenómeno de ruptura espontánea de simetría y sus consecuencias. En la sección 5 se introducirá una simetría local con un campo escalar complejo y se obtendrá de manera natural el Lagrangiano de la electrodinámica escalar, que describe la interacción del fotón con partículas cargadas de espín 0. Finalmente, en la sección 6 se llegará al objetivo de este trabajo, que es explicar el mecanismo de Higgs por el que se genera una masa para el fotón, para lo cual necesitaremos todos los conceptos tratados previamente.

1. Modelo de Ising gauge. Teorema de Elitzur.

A lo largo de este trabajo, vamos a tratar constantemente con conceptos como simetría global, simetría local o ruptura de simetría. Por ello, resulta conveniente empezar introduciendo estos conceptos de forma que los comprendamos de manera intuitiva. Para ello nos haremos servir de un modelo sencillo y conocido como es el modelo de Ising clásico en dos dimensiones, en el cual los conceptos de simetría global y ruptura de simetría se visualizan fácilmente. Realizaremos posteriormente algunas modificaciones en este modelo para introducir también las simetrías locales. Estudiaremos el teorema de Elitzur, que surge como consecuencia de una simetría de ese tipo. Tras esta sección estaremos entonces en una mejor disposición para abordar todos estos conceptos relacionados con la simetría en contextos menos triviales, como una teoría de campos.

1.1. Simetrías globales y ruptura espontánea de simetría

Empecemos recordando brevemente el modelo de Ising clásico en dos dimensiones [1]. Éste consiste en una malla bidimensional en la que en cada nodo se encuentra un espín que puede tomar valores ± 1 . El hamiltoniano del sistema (en ausencia de campo magnético externo) viene dado por

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma(i)\sigma(j) \quad (1)$$

donde J es la constante de acoplamiento entre espines, que suponemos constante, $\sigma(i)$ hace referencia al espín de la red en el sitio i , y el sumatorio denota una suma entre espines vecinos entre sí.

Definida la energía de esta manera, las configuraciones de menor energía serán las que posean una mayoría de espines orientados en la misma dirección, mientras que las de mayor energía serán las que posean un mayor número de conexiones o links rotos (esto es, dos espines vecinos en orientaciones opuestas).

El punto clave acerca de este modelo para nuestra discusión es la existencia de una simetría global: uno puede cambiar la orientación de todos y cada uno de los espines del sistema y el hamiltoniano permanecería constante. En cambio, el estudio del modelo de Ising en dos dimensiones demuestra como esta simetría global puede romperse espontáneamente. A bajas temperaturas, el estado fundamental del sistema es doblemente degenerado: un estado con magnetización positiva y otro con magnetización negativa. Ya que ambos estados no se mezclan bajo ningún orden de teoría de perturbaciones, el espectro del sistema debe de estar basado en sólo una de las dos alternativas.

La ruptura de simetría que estamos tratando involucra un número infinito de grados de libertad ocupando un volumen infinito. De hecho, el fenómeno de ruptura espontánea de simetría está íntimamente ligado al límite de infinitos grados de libertad o límite termodinámico.

1.2. Un modelo de Ising con simetría local

Ahora procederemos a la construcción de un modelo de Ising de tal manera que, utilizando los mismos grados de libertad del modelo de Ising estándar (espines con valor ± 1), los acoplemos de tal manera que obtengamos una simetría local, tal y como hizo F.Wegner en 1971 [2]. El hecho de introducir una simetría local en el sistema impide que surja magnetización, ya que como demostraremos en la siguiente subsección, una simetría local no puede romperse espontáneamente (teorema de Elitzur).

Consideremos una red cuadrada. Etiquetaremos a los links de dicha red utilizando un nodo n y un vector de red unitario. Denotemos como μ y ν a los dos vectores de red unitarios en las dos posibles direcciones espaciales. Colocamos espines Ising ($\sigma = \pm 1$) en cada uno de los links, y definimos una transformación Gauge local en el nodo n como la operación $G(n)$ de girar todos los espines de los links conectados a ese nodo (figura 1).

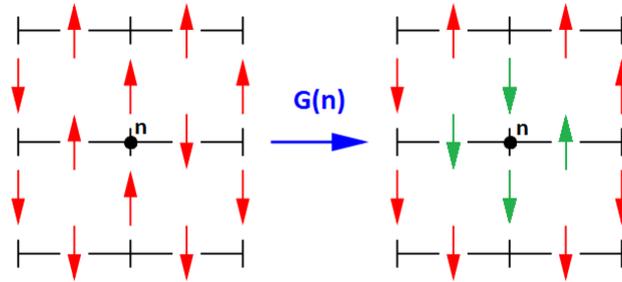


Figura 1: Transformación Gauge sobre el nodo n

Para discutir la energía del sistema, en el modelo de Ising clásico podíamos hablar de links rotos o no rotos (productos de parejas de espines vecinos). Estos conceptos eran invariantes para la simetría global del sistema, ya que si aplicábamos la operación de simetría de ese sistema (cambiar la orientación de todos y cada uno de los espines), la naturaleza de los links no cambiaba. El hamiltoniano de ese sistema (1) da cuenta de esto, ya que no es más que la suma de todos los links del sistema, donde uno no roto aporta un valor de $-J$ y uno roto de J .

Sin embargo, los conceptos de link roto o no roto ya no se pueden utilizar en nuestro actual sistema ya que cambian bajo la operación de simetría, que es la transformación gauge local. Este cambio se comprueba fácilmente aplicando la transformación gauge G en el nodo n . Los espines $\sigma(n, \mu)$ y $\sigma(n, \nu)$ cambiarán de signo, y por tanto los productos $\sigma(n, \mu)\sigma(n + \mu, \nu)$ y $\sigma(n, \nu)\sigma(n + \nu, \mu)$ cambian de naturaleza. Debemos pues utilizar otra característica distinta que permanezca invariante bajo la operación de simetría local. Ésta es la orientación relativa (el producto) de los 4 espines de un cuadrado primitivo, la cual sí resulta ser invariante gauge.

Conociendo esto, ya estamos en situación para definir un Hamiltoniano invariante bajo transformaciones gauge locales, el cual nos permitirá ponderar el peso estadístico de cada una de las posibles configuraciones. De manera análoga al modelo de Ising clásico, donde sumábamos links, el Hamiltoniano será la suma de las orientaciones relativas de todos los cuadrados primitivos del

sistema:

$$H = -J \sum_{n,\mu\nu} \sigma(n, \mu) \sigma(n + \mu, \nu) \sigma(n, \nu) \sigma(n + \nu, \mu)$$

O con una notación más genérica sin denotar cada link

$$H = -J \sum \sigma \sigma \sigma \sigma$$

Si aplicamos G en el nodo n , los espines $\sigma(n, \mu)$, $\sigma(n, \nu)$, $\sigma(n - \mu, \mu)$ y $\sigma(n - \nu, \nu)$ cambian de signo. Esto supone que en cada uno de los 4 cuadrados alrededor del nodo n cambien de signo 2 lados. Por tanto, en el producto de los 4 lados el cambio de signo se anulará, comprobando que en efecto el Hamiltoniano así definido resulta invariante bajo transformaciones gauge locales.

1.3. Teorema de Elitzur

Una vez que ya sabemos distinguir configuraciones por su energía, cabe preguntarse si existirá una transición de fase al igual que en el modelo de Ising clásico. En la anterior sección se mencionó cómo la introducción de una simetría local en el sistema impide que surja magnetización, o lo que es lo mismo, no existirá un parámetro de orden que nos permita distinguir las fases. Esto es precisamente lo que enuncia el teorema de Elitzur [3]: las simetrías gauge locales no pueden romperse espontáneamente. A continuación, procederemos a demostrarlo para nuestro modelo de Ising con simetría local, generalizado a d dimensiones.

Para probar si el sistema mantiene una magnetización espontánea, introduciremos un campo externo h que rompe explícitamente la simetría y actúa a través de un término $h \sum_{n,\mu} \sigma(n, \mu)$ en el Lagrangiano. Con este término calcularemos el valor medio de espín en todo el sistema $\langle \sigma(m, \nu) \rangle$ y tomaremos en primer lugar el límite $N \rightarrow \infty$ (límite termodinámico), y posteriormente el límite $h \rightarrow 0$. Si el valor esperado de σ fuera diferente a 0 en este límite, el sistema estaría magnetizado, lo que supondría la ruptura espontánea de la simetría local.

$$\langle \sigma(m, \nu) \rangle_h = \frac{\sum_{\{\sigma\}} \sigma(m, \nu) \exp\{\beta \sum \sigma \sigma \sigma \sigma + h \sum \sigma\}}{Z} \quad (2)$$

donde

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp\{\beta \sum \sigma \sigma \sigma \sigma + h \sum \sigma\} \quad (3)$$

Realicemos ahora una transformación gauge local en el nodo m . Los links provenientes de este nodo los denotaremos como $\{l_m\}$. El término de interacción de la acción no sufrirá cambios debido a la invariancia gauge. Sólo el término del campo externo cambiará, como ahora veremos:

$$h \sum \sigma = h \sum \sigma' - h \sum \delta \sigma \quad (4)$$

donde σ' es un espín tras la transformación y

$$\begin{aligned}\delta\sigma(l_m) &\equiv \sigma'(l_m) - \sigma(l_m) = -2\sigma(l_m) \\ \delta\sigma(l_m) &= 0, \text{ si } l \notin \{l_m\}\end{aligned}\tag{5}$$

Con la nueva variable σ' la expresión queda

$$\begin{aligned}\langle \sigma(m, \nu) \rangle_h &= \frac{-\sum \sigma'(m, \nu) \exp\{\beta \sum \sigma' \sigma' \sigma' \sigma' + h \sum \sigma' - h \sum \delta\sigma\}}{Z} = \\ &= \langle -\sigma(m, \nu) \exp\{-h \sum_{l_m} \delta\sigma\} \rangle_h\end{aligned}\tag{6}$$

Y con este resultado podemos construir un límite

$$\begin{aligned}|\langle \sigma(m, \nu) \rangle_h - \langle -\sigma(m, \nu) \rangle_h| &= \left| \left\langle -\sigma(m, \nu) \left[\exp\left\{-h \sum_{l_n} \delta\sigma\right\} - 1\right] \right\rangle \right| \\ &\leq |e^{4dh} - 1| |\langle \sigma(m, \nu) \rangle_h| \leq |e^{4dh} - 1|\end{aligned}\tag{7}$$

Como podemos ver, la cota obtenida es independiente de N , con lo cual podemos tomar el límite $N \rightarrow \infty$. Si después tomamos el límite $h \rightarrow 0$ la cota obtenida tiende a cero, con lo que

$$\langle \sigma(m, \nu) \rangle_{h \rightarrow 0} = \langle -\sigma(m, \nu) \rangle_{h \rightarrow 0}\tag{8}$$

lo cual implica que $\langle \sigma(m, \nu) \rangle = 0$ tal y como pretendíamos.

La diferencia con respecto a un sistema con simetría global es que, ya que el sistema es invariante bajo una transformación local, esa transformación lleva a un cambio de energía finito en presencia de h . Por contra, para una simetría global, la operación de simetría implica a un número infinito de grados de libertad.

La generalización de este resultado a cualquier grupo gauge es inmediata. De hecho, el teorema de Elitzur resultará posteriormente de gran importancia cuando se trate el mecanismo de Higgs. Según algunos textos, éste puede ser concebido como una ruptura espontánea de la simetría gauge, cosa que acabamos de ver que no está permitida.

2. Teoría de campos: Conceptos generales

Las teorías cuánticas de campos son la base de las interacciones entre partículas fundamentales. Por ello, resulta conveniente dedicar unas líneas a introducir qué es un campo y a escribir algunas ecuaciones fundamentales. Esto será lo que veamos en esta sección.

Comencemos en primer lugar definiendo lo que es un campo escalar real $\phi(x)$ [4]. Se trata de una cantidad real ϕ definida en cada punto del espacio-tiempo $x = (t, \vec{x})$.

La dinámica de este campo escalar real vendrá descrita por el Lagrangiano

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (9)$$

donde \mathcal{L} es la densidad Lagrangiana (de ahora en adelante, la llamaremos Lagrangiano, tal y como se suele hacer convencionalmente). Para un intervalo temporal $t \in [t_1, t_2]$, la acción correspondiente sería

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L} \quad (10)$$

De manera análoga a como se realiza en mecánica clásica, podemos aplicar el principio de mínima acción para ver cómo es el comportamiento dinámico de los campos. La diferencia es que ahora nos encontramos en un espacio de configuraciones, y el principio dice que un sistema evoluciona de una a otra configuración entre los tiempos t_1 y t_2 por un "camino" en este espacio de configuraciones en que la acción es un extremal, y por tanto $\partial S = 0$. La matemática es totalmente análoga a la mecánica clásica, por lo que pasamos directamente a escribir las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para el campo ϕ :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (11)$$

El Lagrangiano de nuestro campo escalar viene dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (12)$$

donde el primer término es el término cinético, y el segundo el potencial escalar, el cual puede ser escrito de la siguiente manera:

$$V = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \sum_3^\infty \frac{\lambda_n}{n!} \phi^n \quad (13)$$

Para la posterior cuantificación mediante la integral de camino en el espacio euclídeo será conveniente realizar el cambio de métrica de Minkowski a métrica euclídea (cambio a tiempo imaginario $t = -i\tau$). En esta métrica, el Lagrangiano queda así:

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) \quad (14)$$

Si aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange a este Lagrangiano, llegamos a la siguiente expresión

$$\partial_\mu (\partial_\mu \phi) - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (15)$$

y resolviéndola, obtendríamos las ecuaciones de movimiento del sistema. Notar que en el caso de que los términos con λ_n fueran 0 (campo no interactuante), y volviendo a la métrica de

Minkowski, esta ecuación se transformaría en la famosa ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\phi = 0 \tag{16}$$

3. Cuantificación mediante la integral de camino

En esta sección introduciremos la cuantificación mediante la integral de camino. En primer lugar nos centraremos en el caso del oscilador armónico simple, con lo que nos familiarizaremos con la introducción de un retículo como una regularización que nos permite definir matemáticamente una medida de integración que de sentido matemático a la integral. Este formalismo será aplicado de manera similar en teoría cuántica de campos, regularizando divergencias ultravioletas propias de la misma. En definitiva, el uso del retículo nos permitirá dar rigor matemático a expresiones que en el continuo tienen un carácter más bien formal.

3.1. Integral de camino y matriz de transferencia del oscilador armónico simple

En primer lugar trataremos brevemente la formulación de la mecánica cuántica de Feynmann [5].

Consideremos una partícula que inicialmente se encuentra en (x_a, t_a) y finalmente en (x_b, t_b) . Se pretende calcular la amplitud de probabilidad Z de una transición del estado inicial al final. En la formulación canónica, Z es

$$Z = \langle x_b | e^{-\frac{iH}{\hbar}(t_b-t_a)} | x_a \rangle \tag{17}$$

La formulación de Feynmann nos proporciona una visión mucho más intuitiva del problema. Lo que haremos será calcular la amplitud de probabilidad de la transición como la suma de las amplitudes de todos los posibles caminos que hay entre (x_a, t_a) y (x_b, t_b) .

$$Z = \sum e^{i\frac{S_m}{\hbar}} \tag{18}$$

El sumatorio indicado en la anterior ecuación es sobre todos los caminos posibles. Como podemos ver, la amplitud de probabilidad de cada camino viene ponderada por un factor $e^{i\frac{S_m}{\hbar}}$, donde S_m es la acción de un camino en particular. Notar que en los caminos cuya acción S_m sea mucho mayor que \hbar , el cociente $\frac{S_m}{\hbar}$ será mucho mayor que 1, y las fases variarán mucho ante pequeños cambios en la trayectoria. Por tanto, al sumar todas las contribuciones de estos caminos, éstas se irán anulando. En la suma contribuirán prácticamente sólo los caminos de menor acción, es decir, los más cercanos a la trayectoria clásica.

Definamos a continuación la acción S_m

$$S_m = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L} dt \quad (19)$$

donde \mathcal{L} es el Lagrangiano del sistema. Por sencillez, elegimos que el sistema se trate de un oscilador armónico simple de masa unidad, en el cual el Lagrangiano toma el siguiente valor:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \quad (20)$$

Ahora, debemos encontrar un método para poder tratar la suma sobre caminos de la ecuación (18), ya que ésta no está bien definida. Para ello, discretizaremos el eje temporal con un espaciado ϵ [6], de tal manera que x_i es la posición de la partícula en el tiempo t_i , con $t_{i+1} - t_i = \epsilon$. Además, también realizaremos un cambio de variable del tiempo a tiempo imaginario $t = -i\tau$ (cambio a métrica euclídea), de forma que la integral mediante la cual calculamos la acción converja.

Realizando este cambio, y sustituyendo la ecuación (20) en (19), obtenemos el factor $i\frac{S_m}{\hbar}$ que nos aparecía en la exponencial de la ecuación (18).

$$\frac{i}{\hbar} S_m = -\frac{1}{2\hbar} \int \left[\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \omega^2 x^2 \right] d\tau \quad (21)$$

Si definimos ahora la siguiente acción euclídea

$$S = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \omega^2 x^2 \right] d\tau \quad (22)$$

la amplitud de probabilidad de la transición queda

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_i dx_i e^{-\frac{1}{\hbar} S} \quad (23)$$

Esta expresión es la conocida como integral de camino.

Para tiempo discretizado, la acción euclídea es

$$S = \frac{1}{2} \epsilon \sum_i \left\{ \left[\frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon} \right]^2 + \omega^2 x_i^2 \right\} \quad (24)$$

Un aspecto importante acerca de las dos últimas ecuaciones (23) y (24) es darse cuenta de que constituyen un problema de física estadística. Tenemos un retículo unidimensional cuyos nodos van indicados con el índice i . En cada uno de ellos hay una variable x_i que puede tomar valores entre $-\infty$ y ∞ . La acción asocia los nodos consecutivos x_i y x_{i+1} , y la integral de camino no es más que una suma sobre todas las posibles configuraciones (todos los posibles caminos). Cada camino está ponderado por la exponencial $e^{-\frac{1}{\hbar} S}$. La acción jugaría el mismo rol que la energía

en un modelo de física estadística, y \hbar funcionaría como la temperatura. En un problema de física estadística, una temperatura más alta permite mayores fluctuaciones térmicas del sistema, de forma que un sistema a temperatura 0 permanece congelado en la configuración de menor energía. En nuestro caso, \hbar da cuenta de las fluctuaciones cuánticas, y en el caso de valer 0, sólo estarían permitidas las trayectorias clásicas, ya que sería el único camino que contribuiría a la amplitud de probabilidad Z . De esta manera, la analogía $T \leftrightarrow \hbar$ queda establecida.

Volvamos ahora a la expresión (23). Ya que la acción sólo relaciona primeros vecinos, reescribámosla de la siguiente manera:

$$Z = \int \prod_i dx_i T(x_{i+1}, x_i) \quad (25)$$

donde

$$T(x_{i+1}, x_i) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \left[\frac{1}{\epsilon} (x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \epsilon x_{i+1}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \epsilon x_i^2 \right] \right\} \quad (26)$$

Podemos concebir T como el elemento de matriz de un operador (la *matriz de transferencia*). Construiremos un operador \hat{T} , que cumpla la propiedad

$$\langle x' | \hat{T} | x \rangle = T(x', x) \quad (27)$$

y lo utilizaremos para obtener una nueva expresión de Z

$$Z = \int \prod_i dx_i \langle x_{i+1} | \hat{T} | x_i \rangle = \langle x_b | \hat{T}^N | x_a \rangle \quad (28)$$

Imponiendo condiciones de contorno periódicas se obtiene la siguiente expresión aún más reducida

$$Z = \text{tr} \hat{T}^N \quad (29)$$

Ahora queda obtener la expresión explícita de \hat{T} . Sin entrar en el proceso para obtenerla, la expresión es la siguiente:

$$\hat{T} = \exp \left[-\frac{1}{4} \hbar^2 \epsilon \omega^2 \hat{x}^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \hbar \epsilon \hat{p}^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{4} \hbar^2 \epsilon \omega^2 \hat{x}^2 \right] \quad (30)$$

donde \hat{x} es el operador posición $\hat{x} | x \rangle = x | x \rangle$ y \hat{p} es el operador momento conjugado canónicamente $[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$.

Por último, vamos a demostrar que la formulación de Feynmann y la de Schrödinger son equivalentes. Para ello, en primer lugar, vamos a escribir \hat{T} como una exponencial simple. Utilizamos la identidad

$$\exp(\hat{A}) \exp(\hat{B}) = \exp\left(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \dots\right) \quad (31)$$

y hacemos $\hat{A} = -\epsilon \hat{p}^2/2\hbar$ y $\hat{B} = -\epsilon \omega^2 \hat{x}^2/4\hbar^2$. Pero $[\hat{A}, \hat{B}] = O(\epsilon^2)$ y por tanto si tomamos el límite de tiempo continuo $\epsilon \rightarrow 0$, este término será despreciable respecto a \hat{A} y \hat{B} . Entonces

$$\hat{T} = \exp\left(-\frac{\epsilon}{\hbar}[\hat{H} + O(\epsilon^2)]\right) \quad (32)$$

donde \hat{H} es el Hamiltoniano del oscilador armónico simple

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{x}^2) \quad (33)$$

Si retomamos la expresión (28) y sustituimos en ella (32), obtendremos una expresión muy familiar

$$Z = \langle x_b | e^{-\epsilon N \hat{H}} | x_a \rangle = \langle x_b | e^{\frac{1}{\hbar}(\tau_b - \tau_a) \hat{H}} | x_a \rangle \quad (34)$$

y deshaciendo el cambio a tiempo imaginario, obtenemos finalmente

$$Z = \langle x_b | e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar}(t_b - t_a)} | x_a \rangle \quad (35)$$

Esta es precisamente la amplitud de probabilidad de la transición $(x_a, t_a) \rightarrow (x_b, t_b)$ según la formulación canónica mencionada al comienzo de la sección en la expresión (17). De esta manera, ambas formulaciones de la mecánica cuántica demuestran ser equivalentes, y la proposición del retículo como una regularización para la integral de caminos resulta ser adecuada.

3.2. La integral de camino para teoría de campos

En este apartado extenderemos las consideraciones realizadas anteriormente a una teoría de campos, para así poder construir una teoría cuántica de campos. Consideremos un campo escalar en un espacio-tiempo 4-dimensional. El Lagrangiano será el de la expresión (14) (el Lagrangiano euclídeo, a tiempo imaginario), en el cual consideraremos que el potencial sólo contiene los términos de ϕ^2 y ϕ^4 .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda_0 \phi^4 \quad (36)$$

Al igual que en la anterior subsección, estamos interesados en calcular la suma de todos los caminos posibles, ponderados por la acción de cada uno de ellos definida en la expresión (10). De nuevo esta suma de caminos no está bien definida, así que lo que realizaremos será formular el espacio-tiempo como un retículo espacio-temporal anisótropo, donde el espaciado de la red en la

dirección espacial será a y el espaciado en la dirección temporal será τ . Sustituyendo las integrales como sumatorios y las derivadas con diferencias discretas, obtenemos la siguiente expresión:

$$S = \sum_n \left\{ \frac{1}{2} \tau^{-1} a^3 [\Delta_0 \phi(n)]^2 + \frac{1}{2} \tau a \sum_k [\Delta_k \phi(n)]^2 + \frac{1}{2} \tau a^3 m^2 \phi^2(n) + \tau a^3 \lambda_0 \phi(n)^4 \right\} \quad (37)$$

donde $n = (n_0, n_1, n_2, n_3)$ hace referencia a la posición en la red 4-dimensional, y Δ_μ es un operador diferencia discreta definido como

$$\Delta_\mu \phi(n) = \phi(n + \mu) - \phi(n) \quad (38)$$

$\mu = 0$ es la dirección temporal y $\mu = k$ ($k = 1, 2, 3$) es la dirección espacial.

La integral de camino es análoga a la considerada en la sección 2 (expresión 23)

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_n d\phi(n) e^{-\hbar S} \quad (39)$$

De nuevo podemos concebir esto como un problema de física estadística, esta vez en cuatro dimensiones, donde Z es la función de partición (suma de todas las configuraciones posibles ponderada por el factor $e^{-\hbar S}$). Las condición de contorno consiste en especificar el valor de ϕ en todos los puntos del espacio en una rodaja temporal inicial y otra final. Y al igual que hicimos con anterioridad, es posible introducir una matriz de transferencia \hat{T} que propague el campo $\phi(n)$ en la dirección temporal, y que de nuevo nos simplificaría la integral de camino, que quedaría para condiciones de contorno periódicas, de la forma

$$Z = \text{tr} \hat{T}^N \quad (40)$$

donde N es el número de rodajas temporales.

Con esto, tal y como se había indicado al comienzo de la sección, lo que hemos conseguido es utilizar el retículo como una regularización que permite definir matemáticamente una medida de integración y así dar sentido matemático a expresiones de carácter formal.

4. Simetría global en teoría de campos

Una vez introducido el concepto de simetría, conceptos básicos de teoría cuántica de campos y la cuantificación de la teoría clásica de campos mediante la integral de camino, estamos en disposición de estudiar cómo introducir una simetría global en teoría cuántica de campos y de obtener conclusiones derivadas de ello. En primer lugar se tratará una simetría global discreta (en un campo escalar) y posteriormente una simetría global continua (con dos campos escalares acoplados). Veremos el fenómeno de ruptura espontánea de simetría en cada uno de estos casos.

La ruptura espontánea de una simetría global continua resultará de particular interés, ya que a partir de la misma demostraremos el teorema de Goldstone, o lo que es lo mismo, demostraremos la aparición de partículas sin masa cuando se produce dicha ruptura de simetría.

4.1. Simetría interna discreta

Sea ϕ un campo escalar real, nuestro objetivo es que este campo cuente con una simetría global interna [7] (simetría interna es aquella en la que el espacio-tiempo no interviene, a diferencia de una simetría externa como la simetría Lorentz). El Lagrangiano del campo, con su potencial escalar, son los definidos en la sección 3 (ecuaciones 14 y 13), que por comodidad reescribimos a continuación.

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + V(\phi) \quad (14)$$

donde el potencial $V(\phi)$ es

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \sum_3^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\phi^n \quad (13)$$

Ahora, definimos una operación de simetría \mathbb{Z}_2 , que es la siguiente:

$$\phi(x) \rightarrow -\phi(x) \quad (41)$$

Para que este cambio sea en efecto una operación de simetría, lo que ha de ocurrir es que al realizar esta operación, el Lagrangiano del campo quede invariante. Para ello, el potencial escalar V deberá de contener únicamente términos con un número par de campos ϕ . Por otro lado, nos desharemos de los términos de orden 5 o superior, que a bajas energías son despreciables. Reescribamos el potencial bajo estas condiciones:

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (42)$$

Dado que la teoría cuántica consiste en pequeñas fluctuaciones alrededor de la configuración de mínima acción, debemos determinar cuáles son estas configuraciones. Para ello, debemos de introducir nuestro Lagrangiano en las ecuaciones de Euler-Lagrange (11). En la sección 3 ya hicimos esto, obteniendo la ecuación (15), que volvemos a escribir aquí.

$$\partial_\mu(\partial_\mu\phi) - \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad (15)$$

Ahora sólo queda buscar las soluciones a esta ecuación. Al igual que en el modelo de Ising donde el sistema tiende a estar en la configuración de mínima energía, las soluciones a la ecuación (15) serán las que minimicen la acción (es decir, minimicen el Lagrangiano (14)). Para minimizar el Lagrangiano, en primer lugar impondremos que el campo sea constante en todo el espacio-tiempo $\phi(x) = v = cte$ para que así el término cinético del Lagrangiano $\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2$ sea 0 (el mínimo valor

posible). Notar que cualquier valor que pueda tomar el término del potencial para campos no constantes también podrá tomarlo cuando el campo sea constante, con lo que la imposición de campo constante para hallar el mínimo resulta ser correcta. El término de la izquierda de la ecuación (15) será 0, y para encontrar las soluciones sólo tenemos que exigir que

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (43)$$

O dicho de otra forma, tenemos que encontrar los extremos del potencial. De hecho, para minimizar la energía, nos fijaremos únicamente en los mínimos de potencial. Estas soluciones se denominan soluciones de vacío. Asumimos que λ es mayor que 0 para que el potencial esté acotado inferiormente.

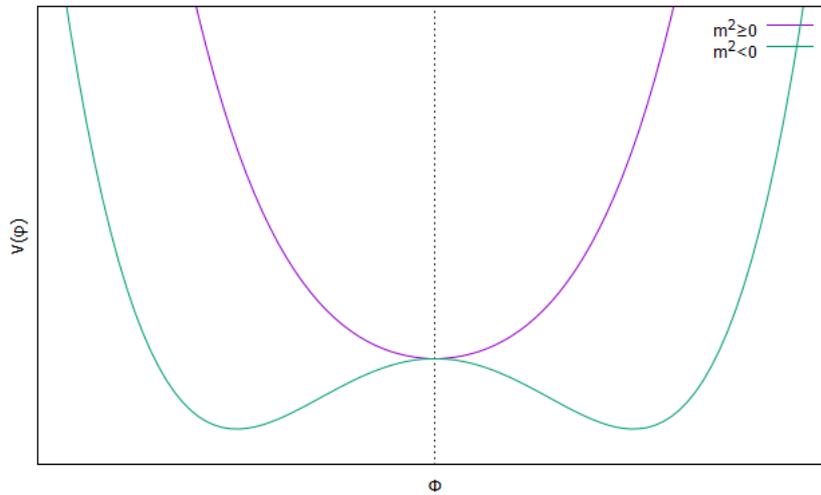


Figura 2: Forma de los potenciales para $m^2 \geq 0$ y $m^2 < 0$

Existen dos casos posibles: el caso $m^2 \geq 0$ o el caso $m^2 < 0$. Podemos observar la forma de ambos potenciales en la figura 2. En el caso $m^2 > 0$ (línea morada) podemos ver que existe un único mínimo en $\phi = 0$. Bajo la transformación (41), esta solución se transforma en ella misma, y decimos que la simetría no está rota en esta solución de vacío.

El segundo caso, con $m^2 < 0$ (línea azul) presenta un máximo en $\phi = 0$ y dos mínimos en

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{\frac{-6m^2}{\lambda}} \quad (44)$$

En este caso se observa que ninguno de los mínimos es invariante bajo la transformación (41), y de hecho se intercambian entre ellos. Se ha producido una ruptura espontánea de simetría, y se puede realizar una analogía entre esta situación y la ruptura de simetría del modelo de Ising clásico.

4.2. Simetría interna continua. Teorema de Goldstone

Llevemos más allá la discusión de la anterior sección y consideremos ahora simetrías globales internas continuas [7]. Para ello, consideremos una teoría escalar con dos campos escalares reales ϕ_1 y ϕ_2 y combinémoslos en un vector de campos

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Estamos interesados en teorías invariantes bajo transformaciones $SO(2)$ (es decir, rotaciones en 2 dimensiones), de la forma

$$\vec{\phi} \rightarrow \vec{\phi}' = O\phi \quad (46)$$

Ya que la longitud de $\vec{\phi}$ debe ser invariante bajo transformaciones $SO(2)$, exigimos $O^T O = O O^T = \mathbb{I}_2$. También, requerimos que $\det(O) = 1$. Una matriz de rotación en 2 dimensiones adecuada puede escribirse entonces como $O = e^{i\alpha T}$, donde α es un parámetro real (ángulo de rotación) y T es la matriz 2×2 que genera las rotaciones en 2 dimensiones.

Para la posterior discusión, será conveniente crear un campo escalar complejo con la misma simetría de rotación. Conceptualmente se trata de lo mismo, tratar simultáneamente con dos campos escalares reales, pero que ahora los uniremos en un único campo complejo. Notar que los grupos $SO(2)$ (rotaciones en dos dimensiones) y el $U(1)$ (variaciones en la fase de un número complejo, es decir, matrices complejas 1×1 que cumplen $z\bar{z} = \bar{z}z = 1$) son isomorfos, pero por conveniencia estaremos utilizando el grupo $U(1)$.

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad (47)$$

Si bien antes la transformación (46) era una rotación en dos dimensiones y actuaba así

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (48)$$

en esta representación compleja, actúa de manera equivalente así

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ i\phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & i \sin \alpha \\ i \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ i\phi_2 \end{pmatrix} \quad (49)$$

o lo que es lo mismo

$$\phi_1 + i\phi_2 \rightarrow e^{i\alpha}(\phi_1 + i\phi_2) \quad (50)$$

En efecto, lo que estamos realizando son variaciones en la fase α de los campos. El Lagrangiano

que busquemos deberá de ser invariante bajo esos cambios de fase, es decir, invariante U(1). De manera similar al caso anterior, donde buscábamos un Lagrangiano que fuera invariante ante una operación de simetría global $\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$, ahora buscamos un Lagrangiano invariante U(1), es decir, se mantendrá constante ante un cambio de fase $\varphi \rightarrow e^{i\alpha}\varphi$ donde α es un factor de fase global (es decir, la fase del campo φ variará lo mismo en cada uno de los puntos del espacio-tiempo)

El modo más sencillo de buscar dicho Lagrangiano invariante U(1) será mediante productos $\varphi^*\varphi$, ya que cada uno se transforma como

$$\varphi \rightarrow e^{i\alpha}\varphi \quad \varphi^* \rightarrow e^{-i\alpha}\varphi^* \quad (51)$$

y por tanto en una multiplicación $\varphi^*\varphi$ los factores de fase desaparecerán. También desaparecen de términos del tipo $(\partial_\mu\varphi^*)(\partial_\mu\varphi)$, ya que el factor de fase no depende de x_μ , salen fuera de la derivada y se anulan de la misma manera.

El Lagrangiano (en métrica euclídea) toma pues la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial_\mu\varphi) + V(\varphi^*\varphi) \quad (52)$$

con

$$V(\varphi^*\varphi) = m^2\varphi^*\varphi + \frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi)^2 \quad (53)$$

Con este Lagrangiano y a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (11), obtenemos la siguiente ecuación:

$$\partial^2\varphi + \frac{\partial V}{\partial\varphi} = \partial^2\varphi + m^2\varphi + \frac{\lambda}{2}(\varphi^*\varphi)\varphi = 0 \quad (54)$$

Ahora sólo nos queda obtener las soluciones de vacío de esta ecuación de movimiento. De nuevo, estas soluciones son las que minimizan al Lagrangiano (52). Para minimizar el Lagrangiano, volvemos a exigir la condición de que el campo sea constante en todo el espacio tiempo, lo cual anulará los términos $\partial^2\varphi$ de (54), y también buscamos minimizar el término del potencial, imponiendo $\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$. Tras esto, la expresión (54) queda finalmente así:

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0 = m^2\varphi + \frac{\lambda}{2}(\varphi^*\varphi)\varphi \quad (55)$$

Tal y como ocurría en el caso anterior, hay un único mínimo $\varphi = 0$ cuando $m^2 \geq 0$, y es invariante bajo la transformación (50), por lo que la simetría U(1) no se ha roto.

En el caso $m^2 < 0$ ocurrirá algo similar a lo que ocurría en el caso anterior. Se rompe la simetría y aparecen varias soluciones. Pero en este caso, ya no tenemos sólo dos soluciones sino todo un círculo de mínimos: se ha producido de nuevo una ruptura espontánea de simetría. La forma de la función $V(\phi^*\phi)$ es la que tendría si tomáramos la figura 2 y obtuviéramos un cuerpo de revolución a partir de ella, asemejándose a un sombrero mejicano (figura 3).

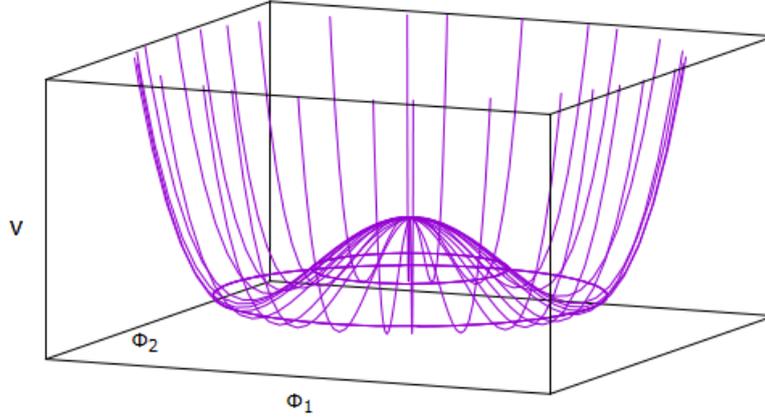


Figura 3: Forma del potencial para $m^2 < 0$

El círculo de mínimos podemos obtenerlo explícitamente a partir de (55), como veremos a continuación:

$$0 = m^2 + \frac{\lambda}{2}(\varphi^* \varphi) \longrightarrow \varphi^* \varphi = \frac{-2m^2}{\lambda} \quad (56)$$

Lo que nos lleva finalmente a esta solución:

$$\varphi = v = \frac{v_0}{\sqrt{2}} e^{i\delta}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{-4m^2}{\lambda}} \quad (57)$$

donde δ es una fase arbitraria. La existencia de esta fase, que origina todo un espacio unidimensional de soluciones de vacío, se debe a la existencia de la invariancia $U(1)$. Si φ es un mínimo de V , también lo será $\varphi' = e^{i\alpha} \varphi$ para cualquier α .

Tomemos pues el mínimo que se encuentra en el eje ϕ_1 y tiene valor positivo, es decir, $\varphi = v_0/\sqrt{2}$ y expandamos el campo de la siguiente manera:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_0 + \varphi_1 + i\varphi_2) \quad (58)$$

donde φ_1 y φ_2 son pequeñas fluctuaciones en las direcciones ϕ_1 y ϕ_2 . Introduciendo esto en el potencial (53), obtenemos

$$V = \frac{1}{4}m^2 v_0^2 - m^2 \varphi_1^2 + \mathcal{O}(\varphi_1^3, \varphi_2^3) \quad (59)$$

Este resultado es importante. Se puede observar que sólo la excitación φ_1 tiene un término con masa, mientras que φ_2 no. Decimos que la primera es una excitación masiva y la segunda es una excitación sin masa. Si observamos la forma del potencial (figura 3), vemos que es un resultado no del todo inesperado. La excitación φ_2 es tangencial al círculo de mínimos (una dirección plana del potencial), mientras que la excitación φ_1 es perpendicular a este círculo (una dirección con curvatura del potencial).

A la aparición de escalares sin masa en rupturas espontáneas de simetrías continuas se le

llama teorema de Goldstone [8] [9], y a estos escalares sin masa se les llama bosones de Nambu-Goldstone. Este teorema se puede generalizar a un conjunto de campos escalares $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)^T$ con su correspondiente potencial $V(\vec{\phi})$.

5. Interacción del fotón con partículas cargadas de espín 0 a partir del principio de invariancia Gauge

En esta sección se tomarán todos los conceptos tratados en otros temas para formular la electrodinámica escalar (esto es, la interacción de partículas cargadas de espín 0 con fotones). Para ello en primer lugar se tratará la teoría del electromagnetismo de Maxwell, ingrediente fundamental para la formulación del mecanismo de Higgs, y posteriormente imponiendo el principio de simetría gauge obtendremos el Lagrangiano que describe la electrodinámica escalar.

5.1. Teoría del electromagnetismo de Maxwell

Comencemos tratando de derivar las ecuaciones de Maxwell utilizando la formulación de la teoría de campos [10]. Escribamos en primer lugar las ecuaciones de Maxwell en el vacío, en función del campo eléctrico \vec{E} y el magnético \vec{B} . Al ser en el vacío, la densidad de carga y la corriente serán nulas.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad (60)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \qquad (61)$$

Los campos \vec{E} y \vec{B} son trivectores espaciales, que se pueden definir a partir del cuadrivector $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ así:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad (62)$$

Esta definición asegura que las dos primeras ecuaciones de Maxwell (60) se cumplen. Las otras dos ecuaciones restantes (61) se obtendrán a partir del siguiente Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) \qquad (63)$$

donde $J^\mu = (\rho, \vec{j})$

Vamos a ver que en efecto, a partir de este Lagrangiano se derivan las dos ecuaciones de Maxwell (61) que buscamos. Aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange al Lagrangiano:

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \partial_\mu (-\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu) \quad (64)$$

Definimos el tensor de fuerza del campo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (65)$$

lo que nos permitirá escribir de forma mucho más compacta tanto el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (66)$$

como las ecuaciones del movimiento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (67)$$

Si ahora definimos la transformación gauge del campo A_μ como

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (68)$$

aplicando esta transformación al tensor $F^{\mu\nu}$ se observa que éste es invariante bajo transformaciones Gauge, y por tanto el Lagrangiano (66) también lo será.

Ahora, calculemos las componentes de $F^{\mu\nu}$. Se trata de un tensor completamente antisimétrico, por lo que los términos de la diagonal serán 0.

$$\begin{aligned} F^{i0} = -F^{0i} &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = - \left(\nabla \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^i = E^i \\ F^{ij} = -F^{ji} &= \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\epsilon^{ijk} B^k \end{aligned} \quad (69)$$

Tras calcular estos componentes, no tenemos más que sustituirlos en las ecuaciones de movimiento (67) y recuperaremos las ecuaciones de Maxwell (61):

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 1} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu 1} &= \partial_0 F^{01} + \partial_i F^{i1} = -\frac{\partial E^1}{\partial t} + \frac{\partial B^3}{\partial x_2} - \frac{\partial B^2}{\partial x_3} = \\ &= \left(\nabla \cdot \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)^1 = 0 \end{aligned} \quad (71)$$

Una vez comprobado esto, únicamente nos queda, al igual que hacíamos en el apartado anterior, pasar a métrica euclídea con el cambio $t = -i\tau$. Las componentes F_{ij} no sufrirán

ningún cambio ya que no presentan componente temporal. En cambio, las componentes F_{0i} sí tienen componente temporal y variarán. Realizaremos también el cambio $A_0 \rightarrow iA_0$, para conseguir que F_{0i} también cambie del modo $F_{0i} \rightarrow iF_{0i}$, ya que

$$F_{0i} = \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x_i} \rightarrow i \frac{\partial A_i}{\partial \tau} - i \frac{\partial A_0}{\partial x_i} = iF_{0i} \quad (72)$$

En métrica euclídea, el Lagrangiano queda de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \quad (73)$$

y a partir de aquí podríamos proceder a la cuantificación del campo a la Feynmann, como ya hemos hecho con el campo escalar en la sección 3.2. Es importante notar que si utilizamos el retículo como regularización de la integral de camino, esta formulación hace uso de las variables del grupo en lugar de las variables del álgebra, y por tanto no da lugar a divergencias gauge.

También cabe destacar que, a pesar de que el Lagrangiano (73) es invariante Gauge, la introducción de un término de masa $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ en él rompería la simetría. Es decir, el bosón asociado a este campo (el fotón) no podría tener masa, ya que se violaría el principio de simetría gauge. Más adelante veremos como mediante el mecanismo de Higgs podremos obtener un término de masa para el fotón sin romper la simetría gauge.

5.2. Simetría local en un campo escalar complejo

Consideremos un campo escalar complejo para una teoría ϕ^4 (es decir, el potencial presentará únicamente el término de masa y un término de la forma $\lambda\phi^4$). Tal y como veíamos en la sección 5.2 de simetría interna continua, el Lagrangiano de este campo tendrá una simetría U(1) global, ya que en las multiplicaciones $\phi^*\phi$ y $\partial_\mu\phi^*\partial_\mu\phi$ se anulan los factores de fase correspondientes al cambio $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m^2\phi^*\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^*\partial_\mu\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2 \quad (74)$$

Lo que ahora vamos a exigir es que este Lagrangiano presente una simetría local. Es decir, la transformación que ahora realizaremos no será la hecha anteriormente de $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$, ya que α es un factor de fase que se aplica globalmente. La operación de simetría local sería que esta fase no fuera global, sino local. Esto se consigue haciendo que el factor de fase tenga una dependencia $\alpha(x)$.

El Lagrangiano (74) no presenta simetría local. Si bien los términos del potencial quedan invariantes bajo el cambio $\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi$ ya que se siguen cancelando los factores de fase en los términos $(\phi^*\phi)$, ahora el término cinético del Lagrangiano sí que varía. Esto se debe a que en los términos $\partial_\mu\phi$ no podemos sacar el término $e^{i\alpha(x)}$ fuera ya que no es una constante. Vemos a continuación cómo se transforman estos términos:

$$\partial_\mu \phi \longrightarrow \partial_\mu (e^{i\alpha(x)} \phi(x)) = e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \phi(x) + ie^{i\alpha(x)} \partial_\mu \alpha(x) \phi(x) \quad (75)$$

Es claro que ese cambio no va a cancelarse en la multiplicación por el término conjugado $\partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi$.

Para conseguir que el Lagrangiano presente una simetría local será necesario introducir un cuadvivector con el que podamos anular los nuevos términos que nos aparecen. El método más sencillo será sustituir la derivada ordinaria ∂_μ por la derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. El Lagrangiano quedaría del siguiente modo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m^2 \phi^* \phi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^* - ieA_\mu \phi^*) (\partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi) + \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2 \quad (76)$$

Con la derivada covariante, se ha impuesto la existencia de un nuevo campo A_μ : el campo gauge. Este campo gauge, ante la transformación gauge $\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi$ varía como ya hemos visto en la expresión (68).

A continuación se comprobará cómo ahora, en efecto, este Lagrangiano sí será invariante bajo una transformación gauge $\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi$. Como ya se ha comentado, los términos del potencial son invariantes de manera trivial al no existir derivadas en ellos:

$$\frac{1}{2} m^2 \phi^* \phi \rightarrow \frac{1}{2} m^2 \phi^* \phi e^{-i\alpha(x)} e^{i\alpha(x)} = \frac{1}{2} m^2 \phi^* \phi \quad (77)$$

$$\frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2 \rightarrow \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2 (e^{-i\alpha(x)} e^{i\alpha(x)})^2 = \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2 \quad (78)$$

Realicemos ahora la transformación del término cinético $\frac{1}{2} D_\mu \phi^* D_\mu \phi$ para ver que también se mantiene invariante.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D_\mu \phi^* D_\mu \phi &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^* - ieA_\mu \phi^*) (\partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi) \longrightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{2} \left[\partial_\mu (\phi^* e^{-i\alpha(x)}) - ie \left(A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \right) \phi^* e^{-i\alpha(x)} \right] \cdot \left[\partial_\mu (\phi e^{i\alpha(x)}) + ie \left(A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \right) \phi e^{i\alpha(x)} \right] &= \\ = \frac{1}{2} \left[e^{-i\alpha(x)} \partial_\mu \phi - \cancel{-ie^{-i\alpha(x)} \partial_\mu \alpha(x) \phi^*} - ieA_\mu \phi^* e^{-i\alpha(x)} + \cancel{ie^{-i\alpha(x)} \partial_\mu \alpha(x) \phi^*} \right] &= \\ \cdot \left[e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \phi - \cancel{+ie^{i\alpha(x)} \partial_\mu \alpha(x) \phi} - ieA_\mu \phi e^{i\alpha(x)} - \cancel{ie^{i\alpha(x)} \partial_\mu \alpha(x) \phi} \right] &= \\ = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi + \partial_\mu \phi^* ieA_\mu \phi - ieA_\mu \phi^* \partial_\mu \phi + e^2 A_\mu^2 \phi^* \phi) &= \\ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^* - ieA_\mu \phi^*) (\partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi) = \frac{1}{2} D_\mu \phi^* D_\mu \phi & \end{aligned}$$

Queda comprobado: el nuevo Lagrangiano propuesto sustituyendo la derivada ordinaria por la derivada covariante sí que presenta una simetría U(1) local.

Además, al nuevo Lagrangiano podemos sin mayor dificultad añadirle un término que sólo involucre al campo gauge A_μ y sea invariante gauge, respetando así el principio de simetría local

que habíamos impuesto. El tensor de fuerza de campo de Maxwell $F_{\mu\nu}$ cumple esta condición. Si añadimos precisamente a nuestro Lagrangiano el Lagrangiano electromagnético $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2$, habremos obtenido el Lagrangiano que describe la electrodinámica escalar, o lo que es lo mismo, la interacción entre partículas cargadas de espín 0 con fotones. Escribámoslo a continuación:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}D_\mu\phi^*D_\mu\phi + V(\phi) \quad (79)$$

6. El mecanismo de Higgs

El mecanismo de Higgs, en el caso académico que nos ocupa, es una herramienta mediante la cual podremos dotar de masa al fotón respetando el principio de simetría gauge. Notar que si añadiéramos un término de masa al Lagrangiano de la electrodinámica escalar (79) de la forma $\frac{1}{2}m^2A_\mu^2$, el Lagrangiano no quedaría invariante ante transformaciones gauge y se habría violado el principio de simetría local que habíamos impuesto previamente. Es decir: en principio no estaría permitido que el fotón presente masa.

Partamos del Lagrangiano de la electrodinámica escalar (79) y desarrollémoslo para ir analizando los términos que aparecen:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m^2\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^* - ieA_\mu\phi^*)(\partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \quad (80)$$

Los dos primeros términos de esta expresión no son más que el potencial del campo escalar, y el último término es el Lagrangiano electromagnético. Centremos nuestra atención ahora en el tercer término (subrayado) y desarrollémoslo. El resultado de multiplicar ambos paréntesis es:

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^*\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}ie(\partial_\mu\phi^*A_\mu\phi - A_\mu\phi^*\partial_\mu\phi) + \frac{e^2}{2}\phi^*\phi A_\mu^2 \quad (81)$$

Si observamos la expresión resultante, el primer término resulta ser el término cinético y el segundo es un término de interacción entre el campo escalar y el campo gauge. El más interesante va a resultar ser el último término, porque podrá constituir un término de masa para el fotón.

En el mecanismo de Higgs, $\phi(x)$ es el campo de Higgs, y además $m^2 < 0$. Un potencial del tipo que tenemos, cuando $m^2 < 0$, va a producir una configuración tipo sombrero mejicano tal y como lo habíamos visto anteriormente en la sección 5.2. En esa configuración, recordemos que la solución del campo ϕ es un círculo de mínimos de la siguiente forma:

$$\phi = v = v_0 \cdot e^{i\delta}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{-2m^2}{\lambda}} \quad (82)$$

El campo ϕ estará entonces fluctuando respecto a este círculo de soluciones. La fase del

campo fluctúa y puede tomar cualquier valor. El teorema de Elitzur postula que en un sistema con simetría local no puede haber una ruptura espontánea de simetría y no puede aparecer ningún parámetro de orden. Es decir, $\langle \phi \rangle = 0$, y por tanto la fase también se mediará a 0.

El producto $\phi^* \phi$ es el módulo del campo, el cual estará fluctuando alrededor del siguiente valor no nulo:

$$v_0 \cdot e^{-i\delta} v_0 \cdot e^{i\delta} = \frac{-2m^2}{\lambda} \quad (83)$$

En la aproximación semiclassical (sin fluctuaciones) el valor del módulo del campo $\phi^* \phi$ es $\frac{-2m^2}{\lambda}$. Si introducimos este valor en el último término de la expresión (81), donde había un producto $\phi^* \phi$, éste toma el siguiente valor

$$\frac{e^2}{2} \phi^* \phi A_\mu^2 = -\frac{m^2 e^2}{\lambda} A_\mu^2 \quad (84)$$

Este término constituye efectivamente un término de masa para el fotón, compatible con la simetría gauge. Recordar que cuando previamente se había planteado introducir un término de masa $\frac{1}{2} m^2 A_\mu^2$ en el Lagrangiano, éste no quedaba invariante ante transformaciones gauge.

7. Conclusiones

Para llegar a explicar el mecanismo de Higgs han sido necesarios todos los conceptos que se han ido introduciendo en el trabajo. Con el modelo de Ising hemos introducido los conceptos de simetría global y ruptura espontánea de simetría que luego hemos aplicado en teoría de campos. Al realizar la modificación al modelo de Ising para que presente una simetría local hemos podido también plantear el teorema de Elitzur y entender que una simetría local no puede romperse espontáneamente. Los conceptos de campo y su Lagrangiano han sido utilizados constantemente desde su introducción, y gracias a ellos hemos podido encontrar la configuración de sombrero mejicano imponiendo un principio de mínima acción.

También, la introducción del retículo como regularización, que nos ha permitido definir una medida de integración, tiene una importancia crucial. El mecanismo de Higgs formulado en el continuo requiere fijar la Gauge para evitar divergencias. En cambio, en el retículo, gracias al uso de variables compactas no hay divergencias gauge y no es necesario fijar la gauge.

El estudio de la simetría global discreta y continua en teoría de campos y la ruptura de estas simetrías nos ha aportado ideas clave necesarias para el mecanismo de Higgs. En particular, el teorema de Nambu-Goldstone no se aplica a nuestro caso porque la simetría gauge no se rompe espontáneamente. La introducción del electromagnetismo utilizando el formalismo de teoría de campos también ha sido necesaria a la hora de introducir la simetría local en un campo escalar complejo mediante la existencia de un campo gauge A_μ .

Gracias a todo esto hemos podido llegar finalmente a explicar el mecanismo de Higgs respetando tanto el principio de simetría Gauge como la imposibilidad de romper espontáneamente

una simetría local.

Como se había indicado en la introducción, este caso es meramente académico. El fotón es un bosón sin masa, pero el proceso que hemos seguido tiene todo lo necesario para poder comprender la generación de masa de los bosones W^+ , W^- y Z_0 . Lo más importante del mecanismo de Higgs es que nos ha permitido conciliar el hecho de que esos bosones gauge sean masivos con que la simetría gauge sea un principio fundamental de la naturaleza.

8. Referencias

- [1] KERSON HUANG, *Statistical Mechanics, 2nd Edition*
- [2] FRANZ J. WEGNER, *Duality in Generalized Ising Models and Phase Transitions Without Local Order Parameters*
- [3] S. ELITZUR, *Phys. Rev. D12, 3978 (1978)*
- [4] DAVID TONG, *Quantum Field Theory*
- [5] RICHARD FEYNMANN, *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*
- [6] JOHN B. KOGUT, *An introduction to lattice gauge theory and spin systems*
- [7] ULI HAISCH, *Elements of Classical Field Theory*
- [8] Y. NAMBU, *Quasiparticles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity*
- [9] J. GOLDSTONE, *Field Theories with Superconductor Solutions*
- [10] JACK VANDERLINDE, *Classical Electromagnetic Theory*
- [11] SUZANNE VAN DAM, *Spontaneous symmetry breaking in the Higgs mechanism*