

Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria,
Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas

Especialidad de Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Semejanza: una propuesta didáctica para 2º de ESO

Autor: José Manuel Marco Hernández

Directora: Pilar Bolea

Septiembre de 2014



Universidad
Zaragoza

ÍNDICE

A. Definición del objeto matemático a enseñar	5
B. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático	6
C. Conocimientos previos del alumno.....	10
D. Razones de ser del objeto matemático.....	15
E. Campo de problemas	21
F. Actividades para ejercitar las técnicas	39
G. Sobre las tecnologías.....	41
H. Secuencia didáctica y su cronograma	42
I. Evaluación	44
J. Bibliografía y páginas web.....	49
ANEXO	51

INTRODUCCIÓN

El trabajo que se expone en la presente memoria da cuenta del aprendizaje y formación pedagógica y didáctica en el área de Matemáticas, obtenida gracias a la realización del Máster Universitario en Profesorado de E.S.O., Bachillerato, F.P. y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas, especialidad de Matemáticas.

Considerando que dicha formación resulta imprescindible para todo aquel que quiera ejercer su labor profesional en el ámbito de la docencia, específicamente en la etapa de educación secundaria, tal y como es exigido en la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Desde un punto de vista más global, la formación pedagógica y el aprendizaje de las nociones básicas de la didáctica de las matemáticas son sin duda herramientas muy útiles a nivel personal.

Por otro lado, en el momento actual de comienzo de aplicación de la LOMCE (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa), es necesario prestar atención a la forma en que dicha ley se plasma en el nuevo currículo de enseñanza secundaria, no publicado todavía a fecha de presentación de esta memoria. Teniendo esto en cuenta, para la realización de este trabajo se ha tomado como base la Ley Orgánica de Educación 2/2006 y el currículo de ESO reflejado en la Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte. Sin embargo, es necesario que el profesor adapte permanentemente su labor educativa al marco legal vigente en cada momento.

Finalmente, tal y como se indica en la guía docente: *el trabajo fin de máster constituye la síntesis de los aprendizajes realizados por el estudiante. Es una actividad en la que el estudiante materializa las competencias, conocimientos y aptitudes adquiridos a lo largo de la titulación.* Bajo esta perspectiva se ha pretendido aplicar los conocimientos adquiridos para el desarrollo de una secuencia didáctica centrada en la enseñanza del concepto matemático de semejanza, tal y como se expone a continuación.

A. DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR.

El objeto matemático que se ha seleccionado para desarrollar una propuesta didáctica es el de semejanza.

El concepto de semejanza se introduce en el primer ciclo de educación secundaria, más concretamente en segundo curso de ESO, si bien, en el último ciclo de educación primaria, los alumnos han trabajado ya los rudimentos de este concepto.

Según se establece en el currículo aragonés de Educación Secundaria Obligatoria, Orden de 9 de mayo de 2007 del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, el concepto de semejanza se incluye dentro del bloque de contenidos de Geometría. Inicialmente se trata en 2º curso aunque en 3º y 4º curso se vuelven a trabajar y se amplían los conceptos relativos a la semejanza.

En 2º curso, según se establece en el currículo aragonés, los temas a tratar relativos a la semejanza, dentro del bloque de Geometría, son:

- *El triángulo. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Semejanza de triángulos: teorema de Thales. Criterios de semejanza de triángulos.*
- *Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza. Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes. Homotecia*
- *Utilización de los teoremas de Thales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes.*
- *Utilización de propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico.*

El campo de problemas que se pretende tomar como punto de partida para la introducción del concepto de semejanza es, por un lado la interpretación y uso de mapas y planos, y por otro, la comparación entre formas geométricas. Para justificar la introducción del teorema de Thales se propone un campo de problemas basado en el cálculo de distancias inaccesibles mediante el uso de triángulos semejantes. En todo momento se intentará contextualizar los conceptos matemáticos con aplicaciones en la vida cotidiana y con el desarrollo histórico del concepto.

En cuanto a las técnicas, se introduce el cálculo de la proporción entre segmentos y los métodos para construir figuras semejantes. Se explica también el método de división de un segmento en partes iguales basado en el teorema de Thales. Debido a su aplicación práctica y su conexión con posibles aplicaciones en la vida real se hace especial hincapié en la técnica para resolver problemas de obtención de medidas inaccesibles. Otra de las técnicas asociadas a la semejanza es la relación entre áreas y volúmenes de figuras semejantes que se introducirá haciendo referencia a modelos concretos.

La justificación de las técnicas se realiza mediante las definiciones de cada uno de los conceptos y la comprobación mediante medición del teorema de Thales y la validez de su aplicación para resolver problemas de medidas indirectas de distancias. Así mismo, la relación de semejanza entre figuras se establece cuando ambas figuras tienen sus ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales (relacionando el concepto de semejanza como “misma forma y variación de tamaño”). No se cree oportuno en este nivel presentar la semejanza como una transformación de un espacio euclidiano producto de una homotecia y un movimiento, aunque sí se describen las homotecias como una forma de construcción de polígonos semejantes. Se justifica también los criterios que nos sirven para determinar si dos triángulos dados son o no semejantes.

B. ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO.

B.1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Para conocer cómo se justifica la introducción del concepto de semejanza se han analizado varios libros de texto. Se describe a continuación las características principales en el tratamiento del concepto de semejanza en cada uno de estos libros de texto.

- Editorial Anaya 2003. 2º de ESO. *En tus manos*.

En este libro de texto se introduce la semejanza mediante varios ejemplos relacionados con escalas: distancia entre dos puntos en un plano, tamaño del objeto real a partir de una maqueta y cálculo del tamaño de objetos a partir de la medida sobre una fotografía. Una vez hecha esta introducción se presenta el concepto de figuras

geométricas semejantes, se profundiza el concepto de escala en planos, mapas y maquetas, y se explica cómo construir figuras semejantes mediante homotecia. A partir de aquí se presenta el teorema de Tales, y los criterios de semejanza de triángulos. Finaliza el tema con aplicaciones de la semejanza de triángulos.

- Editorial SM 2002. 2º de ESO. *Gauss*.

Este texto presenta el concepto de semejanza a partir de la ampliación y reducción de fotografías, definiendo el concepto de figuras semejantes y la razón de semejanza. Se explica cómo construir figuras semejantes a partir del método de cuadrícula. Presenta entonces el teorema de Tales, cómo dividir un segmento en partes iguales, los criterios de semejanza de triángulos y la razón de áreas entre figuras semejantes. Se deja como último punto la explicación de la escala en mapas, planos y maquetas.

- Editorial Teide 1996. 2º ciclo de ESO. *Matemáticas*.

En este caso el tratamiento del concepto es completamente diferente. Se expone el Teorema de Tales, dentro de un tema relativo a los teoremas fundamentales de geometría plana en un marco más teórico, y varias aplicaciones relacionadas con la proporcionalidad de segmentos: división en partes iguales y construcción del tercero y cuarto proporcional. En el mismo tema se estudia la semejanza de triángulos.

El concepto general de semejanza de figuras en el plano se explica en un tema posterior, se introduce el concepto de homotecia como una transformación del plano y cómo obtener figuras semejantes mediante composición de homotecia, traslación, giro y simetría. Se establece la relación de perímetro y área entre figuras semejantes y una breve explicación de la representación a escala en planos.

- Editorial Almadraba 1996. 3º de ESO. *Matemáticas*.

El concepto de semejanza se incluye dentro del tema “Cambios de posición y de tamaño”. La justificación para la introducción del concepto se basa en la comparación de figuras geométricas planas, siendo la cuestión generatriz la pregunta “¿Cómo puedes saber si dos figuras tienen la misma forma?”

Como una introducción al tema se repasan los conceptos de dirección y sentido, vectores, traslación, giro, simetrías y el teorema de Tales. A partir de estos conceptos se trata más en profundidad la igualdad entre figuras, se estudian diferentes tipos de simetrías en figuras planas y se clasifican los triángulos y cuadriláteros en función de su

simetría. En este momento se introduce la homotecia como una herramienta para construir ampliaciones o reducciones de una figura. A partir de los conocimientos anteriores se presenta el concepto de semejanza como “*los cambios (transformaciones) que dejan la forma invariante*”. Presenta por tanto la semejanza como una transformación del plano, compuesta por la aplicación sucesiva de transformaciones.

- Editorial Castellnou. 2º ciclo de ESO. 1995. Matemáticas.

El tratamiento de la semejanza en este libro de texto es muy similar al enfoque utilizado en el texto anterior, Ed. Almadraba. La semejanza se introduce como una composición de transformaciones geométricas: “*En combinar moviments i homotècies tenim les semblances; totes les semblances del pla s’obtenen aplicant successivament moviments (translacions, rotacions i simetries axials) i homotècies.*”

B.2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Habitualmente se define el concepto de razón de semejanza y se proponen figuras semejantes en las que es necesario encontrar dicha razón, o viceversa, a partir de una figura y una razón de semejanza se pide encontrar las medidas de la figura transformada. Otro campo de problemas que se plantea es el de determinación de distancias a partir de diferentes geometrías de observación que determinan triángulos semejantes. La obtención de medidas reales a partir de planos y mapas dada una escala es otro de los campos de problemas que aparece normalmente en los libros de texto.

Las técnicas empleadas se basan en la aplicación de la proporcionalidad de segmentos en triángulos en posición de Thales y en la utilización de la razón de semejanza para la obtención de medidas reales a partir de medidas en planos. En alguno de los libros de texto aparecen como técnicas para la construcción de figuras semejantes métodos de cuadrícula y de homotecia.

En cuanto a las tecnologías es preciso indicar que los libros consultados no justifican con demasiado detalle las técnicas utilizadas, tampoco se dan demostraciones de los teoremas principales. Se puede decir que las tecnologías en este nivel se basan sobre todo en definiciones y en la comprobación mediante medida de los teoremas y conceptos principales. Una vez establecido el teorema de Thales se utiliza éste como justificación de las técnicas de resolución en los problemas de medidas indirectas.

B.3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Al finalizar el tema se pretende que los alumnos sean capaces de identificar figuras semejantes y de calcular la razón de semejanza. Este conocimiento les será útil para saber interpretar planos y mapas y el concepto de escala. Conocerán el teorema de Thales y poseerán estrategias para la resolución de problemas que impliquen la medida indirecta de distancias.

La utilización de construcciones geométricas típicas y poco variadas, con razones de semejanza enteras, y la presentación segmentada en diferentes cursos del concepto de semejanza genera en los estudiantes ciertas dificultades en su aprendizaje. A ese respecto, Gualdrón (2006) manifiesta que esta atomización del contenido matemático (razón, proporcionalidad, teorema de Thales, entre otros) y la falta de relación entre los mismos, da lugar a organizaciones matemáticas puntuales que propician las siguientes dificultades:

- No se reconoce la semejanza de figuras cuando las medidas de los lados de una, no son múltiplos enteros de las medidas de la otra figura.
- Cuando se dibuja una figura semejante, lo cual implica dibujar otra más grande o más pequeña, con frecuencia no se guarda la razón entre sus lados.
- Se utiliza una relación de tipo aditivo para la ampliación, con el fin de evitar la multiplicación por una fracción.
- Confundir figuras parecidas con semejantes.
- Identificar erróneamente polígonos semejantes (comprobar sólo algunas condiciones de semejanza)
- No verificar la solución apoyándose en la razón de semejanza.
- Mezclar los criterios de semejanza.
- Dificultad con la notación de escala.
- Vincular la escala a una única unidad de medida.
- Generalizar la razón de semejanza en superficies y volúmenes.
- Establecer de manera errónea la proporción que determina el teorema de Thales o la semejanza de figuras.
- Aplicar el teorema de Thales cuando no se cumplen las condiciones del teorema (por ejemplo, paralelismo).

- Dificultad para representar una situación gráficamente que se resolverá mediante semejanza.
- No seleccionar correctamente los datos para resolver un problema o utilizar datos innecesarios.

Además de estos errores comunes, si las formas de representación no son las suficientes, puede ocurrir que el concepto no sea comprendido en su totalidad.

C. CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO.

C.1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Previamente a la introducción de los conceptos matemáticos descritos, los alumnos deben poseer diferentes conocimientos geométricos, principalmente los conceptos de: punto, recta, segmentos y ángulos, medida y operación con segmentos y ángulos, el reconocimiento de triángulos y polígonos y sus propiedades básicas, construcción de figuras geométricas, el concepto de paralelismo y el de proporcionalidad entre segmentos. El alumno debe haber adquirido la capacidad para reconocer y clasificar diferentes formas geométricas, sus propiedades y las relaciones entre ellas.

Así mismo, debe haber adquirido competencia en aspectos numéricos y aritméticos: operar con fracciones, decimales, números racionales positivos, etc., y también poseer cierta soltura en el manejo de reglas sencillas algebraicas.

Ya que la secuencia didáctica se desarrolla en un entorno basado en la resolución de problemas, es necesario que el alumno sea capaz de desplegar estrategias y técnicas para abordar los problemas y comprender las relaciones matemáticas que surgen de ellos.

C.2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

La enseñanza de la geometría ha comenzado en las etapas escolares previas, desde la identificación de formas geométricas básicas en Educación Infantil y primer ciclo de Educación Primaria hasta los primeros conceptos geométricos que se trabajan con mayor detalle en 2º y 3º ciclo de Educación Primaria.

Según se establece en la ORDEN de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación

Primaria, la enseñanza de Geometría en esta etapa incluye los siguientes conceptos que son relevantes para el estudio del concepto de semejanza:

Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de cantidades de magnitudes

- *Necesidades y funciones de la medida.*
- *Las técnicas de medir: comparación con la unidad y expresión del resultado de la medida. Desarrollo de estrategias personales para medir figuras de manera exacta y aproximada.*
- *Realización de mediciones usando instrumentos y unidades de medida del Sistema Métrico Decimal en contextos cotidianos.*
- *Longitud, superficie, capacidad y masa.*
- *Utilización de estrategias personales para comparar dos cantidades de la misma magnitud. Comparación de cantidades de superficie de figuras planas por superposición, descomposición o comparación.*
- *El ángulo como medida de un giro o abertura y como medida de una región plana. Medición de ángulos con instrumentos convencionales.*

Bloque 3. Geometría

- *Ángulos en el plano y en el espacio.*
- *Descripción de la posición o el movimiento de un objeto en el espacio con relación a uno mismo, con relación a otros objetos y con relación a sistemas de referencia -geográficos o de coordenadas cartesianas-. Distancias, giros y ángulos.*
- *Representación gráfica elemental del espacio.*
- *Formas planas. Del espacio al plano: superficies de poliedros y cuerpos redondos, sombras, cortes, etc. Triángulo: relación entre lados, y entre lados y ángulos. Polígonos: elementos, características y clasificación. Círculo y circunferencia: elementos y características. Regularidad y simetría.*
- *Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.*
- *Reconocimiento de simetrías en figuras y objetos. Trazado de una figura plana simétrica de otra dada respecto de un elemento dado.*
- *Geometría métrica. Segmento: medidas de segmentos. Perímetros de polígonos. Longitud de la circunferencia. Área del rectángulo. Área del triángulo. Área de polígonos. Área lateral y total de poliedros. Área del círculo.*
- *Construcción de figuras geométricas planas a partir de datos. Construcción de cuerpos*

geométricos a partir de su desarrollo. Exploración de figuras geométricas elementales.

- *Semejanza de figuras: ampliaciones y reducciones. Escalas. Planos, mapas y maquetas.*
- *Identificación precisa de conceptos del plano y del espacio. Puntos, rectas y planos en el espacio: características y relaciones. Puntos y rectas en el plano: características y relaciones. Posiciones relativas de dos rectas en el plano: incidencia (perpendicularidad) y paralelismo. Posiciones relativas de rectas y circunferencias.*
- *Ángulos. Elementos. Tipos. Cálculo con ángulos.*
- *Clasificación de figuras geométricas de acuerdo con diferentes criterios observando cuáles son más generales y cuáles son irrelevantes.*
- *Utilización de instrumentos de dibujo y programas informáticos para construir figuras, para verificar propiedades o para explorar, formular y comprobar conjeturas.*

Además de los conocimientos adquiridos durante la educación primaria en el primer curso de ESO el alumno recibe formación en geometría sintética, en concreto:

- *Elementos básicos de la geometría del plano. Punto, recta y segmento. Posición relativa de rectas: incidencia y paralelismo. Ángulos: propiedades. Medida de ángulos: operaciones. La perpendicularidad.*
- *Análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad. Empleo de métodos inductivos y deductivos para analizar relaciones y propiedades en el plano. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz.*
- *El triángulo. Descripción, elementos, construcción, clasificación y propiedades. Perímetro y área: concepto y cálculo.*
- *Polígonos: descripción, elementos, construcción, clasificación y propiedades. Perímetro y área: concepto y cálculo.*

En segundo curso, anteriormente a la unidad didáctica relativa a la semejanza, se estudia el teorema de Pitágoras, el reconocimiento de triángulos y el cálculo de distancias en polígonos. Este tema sirve también como repaso a los conceptos geométricos vistos en el curso anterior.

C.3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

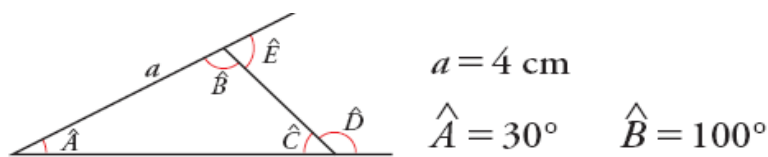
A pesar de que se supone que los alumnos poseen ya los conocimientos básicos descritos, es conveniente plantear alguna actividad sencilla que permita a los alumnos afrontar el estudio de la semejanza con los conceptos previos bien asimilados.

Para asegurar esto, se plantean varios ejercicios y problemas en los que los alumnos

deben poner en práctica conocimientos que ya poseen. La realización en clase de esta serie de actividades permitirá al profesor realizar una evaluación diagnóstica acerca de los conocimientos de los alumnos, y si es necesario, dedicar algo de tiempo a un repaso de los conceptos básicos.

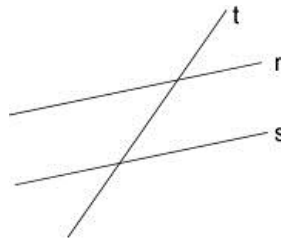
Las actividades que se plantean como evaluación y repaso son las siguientes:

1. Un automóvil consume 56 litros de gasolina al recorrer 800 kilómetros, ¿cuántos litros de gasolina consumirá en un viaje de 500 kilómetros?
2. Utilizando regla, compás y transportador, construye un triángulo como el de la figura con las siguientes medidas:



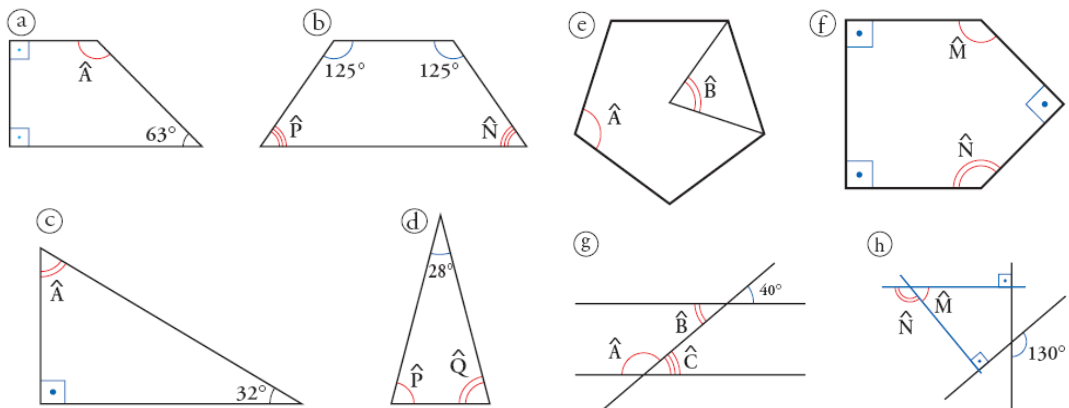
Localiza los ángulos D y E y calcula su valor.

3. Reconoce visualmente si las rectas siguientes son coincidentes, paralelas o secantes.



4. Calcula el ángulo que describe el minutero de un reloj cuando pasa de las 3:20 a las 4:00.

5. Calcula el valor del ángulo o de los ángulos que se piden en cada figura. Reconoce previamente de manera visual el tipo de figura.



Estos ejercicios se realizarán de manera individual en clase. De esta manera el profesor podrá ver el desempeño de cada uno de los alumnos y resolver las dudas que les surjan. Servirá también para obtener una evaluación del nivel de comprensión de los alumnos respecto a conceptos básicos geométricos.

Otra alternativa para la evaluación de diagnóstico, así como para la elaboración de la secuencia didáctica, podría basarse en el modelo de razonamiento de Van Hiele. Según indica Gualdrón (2007): “*El modelo de razonamiento de Van Hiele está demostrando que es un excelente referente teórico para la organización y evaluación de la enseñanza y el aprendizaje*”, es sobre todo muy adecuado para su aplicación en la enseñanza de la Geometría.

En Fouz y en Gutiérrez (1998) encontramos una descripción de las características esenciales de cada uno de los niveles de Van Hiele.

Nivel 0: Visualización o reconocimiento. Los objetos se perciben en su totalidad, por su apariencia física, no se reconocen explícitamente sus atributos ni componentes

Nivel 1: Análisis. Se perciben los componentes y propiedades de objetos y figuras tanto por observación como por medición. Pueden describir las figuras por sus propiedades, pero no relacionar unas propiedades con otras. En este nivel comienzan a generalizar propiedades.

Nivel 2: Ordenación y clasificación lógica, deducción informal. Describen las figuras de manera formal, entienden el significado de las definiciones. Reconocen cómo unas propiedades derivan de otras y establecen relaciones entre ellas. Siguen las demostraciones pero en la mayoría de los casos no comprenden su estructura.

Nivel 3: Deducción formal. Realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos.

Nivel 4: Rigor. Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías. Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.

En la etapa educativa para la que se presenta la secuencia didáctica se puede considerar que los niveles 3 y 4 son inalcanzables para los estudiantes, por lo que los

esfuerzos se deben centrar en conseguir que los alumnos, partiendo del nivel básico, alcancen el nivel 2, y sean capaces de establecer relaciones entre propiedades de figuras semejantes.

Para la utilización de este marco teórico en la enseñanza, según propone Malloy (2002), en primer lugar el profesor debe reconocer y comprender en qué nivel Van Hiele está cada uno de sus alumnos, y en segundo lugar, debe ayudar a sus estudiantes a progresar a través de estos niveles de manera que estén preparados para alcanzar niveles de razonamiento superiores. El paso de un nivel a otro se produce de una forma secuencia a través de diferentes fases que también aparecen descritas en Fouz.

Aunque el modelo Van Hiele resulta interesante en cuanto a la organización de una secuencia de aprendizaje, se ha preferido el enfoque basado en un campo de problemas, si bien es cierto que con algunas de las actividades descritas en la secuencia didáctica podría evaluarse si los alumnos han alcanzado el nivel de ordenación y clasificación lógica.

D. RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO.

D.1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

La razón de ser de la introducción del concepto de semejanza va a ser principalmente su utilidad para la construcción e interpretación de mapas y planos, y la resolución de problemas que requieran de mediciones indirectas. Otra razón de ser de este concepto matemático es su aplicación en el tratamiento de imágenes, principalmente en la ampliación y reducción de fotografías y documentos en fotocopiadoras.

La proporcionalidad de segmentos homólogos entre figuras semejantes se indicará también como herramienta para la resolución de otros problemas geométricos.

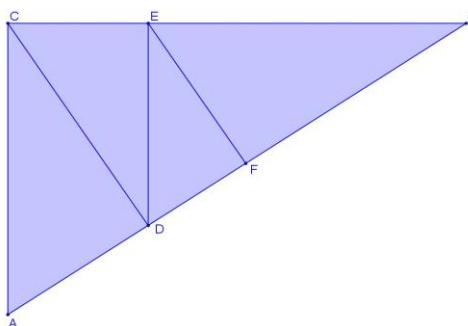
Por otro lado se tendrá en cuenta las razones históricas para la introducción del teorema de Thales. Se expondrá la época histórica en la que Thales planteó su teorema y se describirá también como Thales utilizó sus conocimientos para determinar las alturas de las pirámides de Egipto observando las longitudes de sus sombras.

D.2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Como muchos otros objetos matemáticos el concepto de semejanza ha ido evolucionado a lo largo de la historia, desde las primeras aplicaciones puramente prácticas en la Época Antigua hasta el objeto matemático muy elaborado que se estudia actualmente en niveles universitarios de Geometría.

En este sentido las razones de ser del concepto de semejanza que se van utilizar para su introducción en el aula han sido, de una forma u otra, origen para la elaboración y ampliación del concepto de semejanza tal y como se establece actualmente.

Respecto al origen histórico del concepto podemos indicar, según se recoge en Boyer (2001), que posiblemente los babilonios ya estaban familiarizados con un concepto primitivo de semejanza entre figuras. En Mesopotamia, y también en Egipto, los muchos problemas sobre medidas de triángulos que aparecen en las tablillas cuneiformes parecen sugerir un cierto concepto de semejanza. En el museo de Bagdad se conserva la tablilla de Tell Harmal, datada de comienzos del segundo milenio antes de Cristo, en la que está dibujado un triángulo rectángulo ABC de lados $a=60$, $b=45$ y $c=75$, subdividido en cuatro triángulos rectángulos menores ACD, CDE, DEF y EFB, cuyas áreas también se mencionan, formados por las alturas correspondientes: CD es la altura sobre AB del triángulo ABC, DE es la altura sobre CB del triángulo BCD, y EF es la altura sobre BD del triángulo BED.



A partir de estos valores el escriba calcula la longitud del lado AD utilizando un tipo de fórmula de semejanza que viene a ser equivalente a nuestro teorema que dice que las áreas de figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de lados correspondientes.

Alrededor del año 585 a.C., nació Thales de Mileto, filósofo y matemático griego,

fundador de la Escuela Filosófica Jónica, y uno de los Siete Sabios de Grecia, al que se le atribuyen varios teoremas importantes aunque no hay ningún documento antiguo que pueda aportarse como prueba evidente de estos descubrimientos pero según la tradición Thales estableció algunos de estos:

“Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes”.

“Si dos rectas secantes son cortadas por una serie de rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra recta”.

Además, hay algunas otras referencias a Thales dispersas por fuentes antiguas, pero la mayor parte de ellas describen actividades de carácter práctico: Diógenes Laercio, seguido por Plinio y Plutarco contaron que Thales midió las alturas de las pirámides de Egipto observando las longitudes de sus sombras en el momento en que la sombra proyectada por un palo vertical era exactamente igual a su altura y también que calculó la distancia de un barco a la playa por medio de la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes.

La aparición formal del concepto de semejanza aparece reflejada en los *Elementos* de Euclides (Siglos IV-III A.C.), incluida en el Libro VI, en el que se define el concepto de semejanza y se proponen problemas o construcciones que involucran la semejanza entre figuras rectilíneas, proposiciones 18 y 25. Según indica Quintero et al. (2012):

“Si bien en el Libro VI Euclides utiliza varios conceptos (v.g., equiángulo, semejante, altura, subtiende, extrema y media razón, inversamente relacionado, semejanza), en éste define...:

Definición 1. Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales.

Esta primera definición encontrada en el Libro VI nos aproxima a la idea de semejanza que utiliza el autor. Aquí nos interesa enfatizar en que Euclides establece la semejanza únicamente como una característica de dos o más figuras rectilíneas (polígonos), pero no establece semejanza entre figuras no rectilíneas; la proporcionalidad geométrica se da entre al menos tres objetos

geométricos (o más precisamente, entre al menos tres cantidades de magnitudes homogéneas).”

En cualquier caso, más allá del origen histórico del concepto preliminar de semejanza y sus primeras aplicaciones prácticas, es interesante presentar la evolución histórica del concepto y los posibles obstáculos epistemológicos relacionados con ese desarrollo histórico. En este sentido, Escudero (2005) expresa distintas formas de aproximarse al concepto de semejanza, basándose en el trabajo de Lemonidis (1991) distingue tres grandes periodos de evolución histórica:

- a) El griego. La primera demostración del teorema de Thales y algunos teoremas relativos a figuras semejantes se encuentra en los Elementos de Euclides (s. IV a.C.). Hay que destacar de este periodo y, en general, en el periodo de la influencia de la geometría de Euclides, que las transformaciones no existen como tales.
- b) Del siglo XVI al XVIII. Los problemas de la representación del espacio que surgen en el Renacimiento van a ser el germen para el estudio de las transformaciones. Durante estos siglos, se van a ir desarrollando lentamente, sin que se pueda identificar aún una etapa de utilización consciente y de conceptualización de las mismas. De este periodo, se resalta la consideración de una transformación como un útil en la resolución de problemas.
- c) Siglos XIX y XX. Periodo de la estructuración y algebraización de la geometría. En el siglo XIX se produce la consideración de la homotecia y de la semejanza como objetos matemáticos, debido en gran parte al desarrollo que experimenta la geometría, entre las fechas de publicación de la geometría descriptiva de Monge (año 1799) y el Programa Erlangen de Felix Klein (año 1872) y a la evolución del campo numérico.

A partir de aquí, Lemonidis (1991) identifica tres momentos distintos en el concepto de semejanza, desde los que, a su vez, se pueden determinar tres aproximaciones a ella que creemos que deben tenerse presentes cuando se la considera como objeto de enseñanza:

- a) Relación intrafigural. Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra.

- b) Transformación geométrica vista como útil. La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en él mismo. Se utiliza la semejanza como un útil en la resolución de problemas gráficos.
- c) Transformación geométrica como objeto matemático. Caracterizada porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

D.3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

Se ha pretendido elaborar una secuencia didáctica a partir de una cuestión generatriz que de origen a una praxeología matemática y a su vez exija la evolución de las técnicas conocidas y la aplicación de nuevas técnicas para la resolución del campo de problemas propuesto. Las técnicas se sustentan en tecnologías cuya institucionalización en este caso es tarea del profesor.

Como cuestión generatriz se propone una tarea práctica que exija la utilización de conceptos y herramientas que inicialmente el alumno no posee. A medida que los alumnos avancen en el estudio del tema serán capaces de aplicar lo aprendido en la resolución del problema.

Cuestión generatriz:

Dibujar una representación a escala de un edificio.

La resolución de esta tarea va a suponer aplicar una serie de técnicas matemáticas relacionadas directamente con el concepto de semejanza. En primer lugar supone la modelización de un objeto en tres dimensiones, es decir la representación en el plano del espacio tridimensional.

El trabajo se descompondrá en varias fases que se irán resolviendo de forma paralela a la resolución del campo de problemas que se presenta en el apartado E.

La idea de este trabajo es que los alumnos se encuentren en la situación de tener que utilizar su conocimiento matemático en un entorno alejado de los problemas formales escritos en un papel, en el sentido expresado por Brousseau (1986):

“...[el alumno] solo habrá adquirido verdaderamente este conocimiento cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional”

Para conseguir este objetivo se plantea que el trabajo se realice en grupos de 3 o 4 alumnos, siendo el objetivo principal que el grupo elabore una representación del propio instituto, lo más fiel posible a la realidad, utilizando para ello las herramientas que estimen oportunas y sus conocimientos matemáticos.

Las fases en las que se ha dividido el trabajo y que los alumnos deben seguir guiados por el profesor, son:

Representación de la planta del edificio.

Fase 1: Descomponer en figuras geométricas básicas la planta del edificio.

Fase 2: Dibujo de un boceto sobre papel y medición de distancias.

Fase 3: Establecer una razón de proporcionalidad o escala y dibujo de la planta del edificio mediante polígonos semejantes.

Fase 4: Escanear las representaciones y comparación de la planta dibujada con plano real o con imagen extraída de googlemaps.

Representación del alzado

Para el alzado se requiere medir las diferentes alturas del edificio.

Fase 5: Utilización de métodos de medida de distancias inaccesibles.

Fase 6: Utilizando la misma razón de proporcionalidad dibujar el alzado del edificio utilizando polígonos semejantes.

Trabajo con el modelo:

Fase 7: Una vez que se ha construido la representación del edificio es posible obtener datos útiles a partir del plano. Se pide a los alumnos que obtengan la siguiente información a partir del modelo dibujado:

- a) Se quiere vallar el instituto mediante un vallado rectangular de manera que se deja al menos un espacio de 15m desde cualquier pared del instituto hasta la valla. Dibujar en el modelo el vallado y calcular los metros lineales de valla necesarios.
- b) Es necesario pintar el tejado del edificio, para ello se empleará una pintura con un rendimiento de 1.3 m^2 por litro. Calcular cuántos litros de pintura será necesaria.

- c) Para calcular el sistema de calefacción del edificio se necesita una estimación del volumen total del mismo. Dar una estimación del volumen del edificio en metros cúbicos.

E. CAMPO DE PROBLEMAS

El campo de problemas que se utilice debe favorecer que el alumno adquiera el conocimiento de los siguientes conceptos y de las técnicas asociadas para conseguir que adquiera la competencia suficiente para su aplicación en situaciones reales y más concretamente en el trabajo que se ha planteado como cuestión generatriz, es decir la necesidad de representar objetos reales. Para conseguir esto se propone un campo de problemas en el que aparecen y se trabaja con cada uno de los conceptos siguientes.

1. Calcular la razón de dos segmentos.
2. Identificar y describir invariantes entre dos figuras semejantes.
3. Identificar polígonos semejantes y deducir su razón de semejanza.
4. Construir un polígono o figura semejante a otro, dada la razón.
5. Reconocer triángulos semejantes utilizando los criterios de semejanza.
6. Establecer la relación entre las razones de perímetro, superficie y volumen de figuras semejantes.
7. Calcular distancias, áreas y volúmenes en mapas, planos y maquetas interpretando la escala.
8. Identificar y construir triángulos semejantes utilizando el teorema de Thales.
9. Calcular distancias inaccesibles en situaciones reales usando el teorema de Thales.

Conviene resaltar, como indica Escudero (2003), que el razonamiento proporcional está implícito en el propio concepto de semejanza, por lo que en muchas ocasiones aparecen en el campo de problemas situaciones que se resuelven directamente mediante proporcionalidad.

Basándonos en estos puntos se plantea el siguiente campo de problemas, la metodología para su aplicación en el aula, las técnicas necesarias para su resolución y la tecnología que las sustentan.

Los problemas que se presentan se pueden encontrar en los textos escolares consultados, así como en la abundante colección de problemas que se publican en la

web, todos ellos recogidos en la bibliografía. Sin embargo, la mayor parte de ellos han sido modificados para adaptarlos a la secuencia didáctica, que constituye en sí la propuesta original.

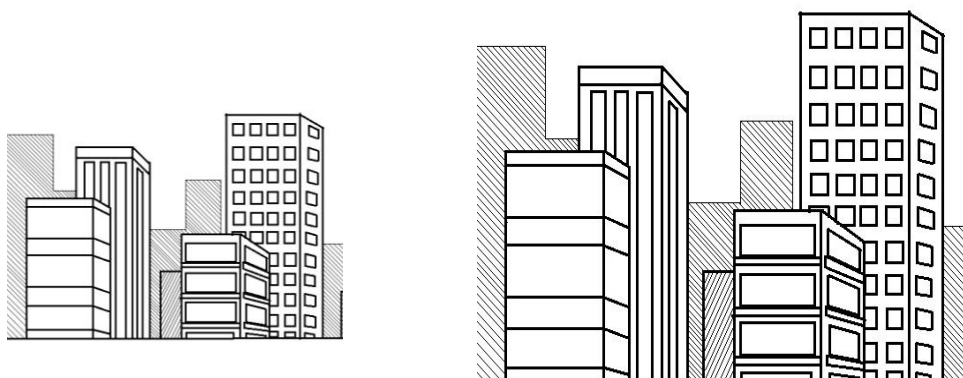
En cuanto a la metodología indicar que la secuencia didáctica está basada en la resolución de problemas, de manera que se permita que el alumno utilice sus conocimientos previos para adquirir conocimientos significativos en el propio proceso de resolución del campo de problemas. Se potenciará el trabajo en grupo y se fomentará el debate y la reflexión acerca de las ideas que generen los propios alumnos. En cada uno de los problemas se describe en términos generales la metodología a seguir.

Como apoyo para la comprensión de los problemas una vez resueltos en clase y como exploración de las relaciones geométricas establecidas en las tecnologías, se propone utilizar el software de geometría dinámica Geogebra. Para ello se ha elaborado una serie de materiales basados en las cuestiones más representativas del campo de problemas. Así mismo, estos archivos pueden ser útiles como una vía de atención a la diversidad, ya que permitirán que los alumnos que encuentren más dificultades en la comprensión de los conceptos puedan visualizar y explorar tanto el problema como su solución fuera del horario escolar. En el anexo a esta memoria se describe brevemente cada uno de los archivos y se indican los enlaces web para su utilización.

Problema 1: Ampliar y reducir.

Se muestran varios tamaños de fotografías donde aparece una misma figura y se reflexiona sobre el concepto de semejanza: misma forma pero distintos tamaños. La forma se mantiene porque las distancias relativas son proporcionales.

Se pide comprobar en dos imágenes semejantes que las distancias son proporcionales.



Metodología:

Presentación del concepto de semejanza. El tamaño es lo que diferencia a las figuras semejantes. Podemos utilizar imágenes basadas en figuras geométricas ampliadas con una fotocopidora y mostrar a los alumnos que ambas figuras son semejantes y visualicen que únicamente se diferencian en el tamaño. Aprovecharemos para que los alumnos se den cuenta de que las dimensiones de una de las figuras guardan la misma proporción con las dimensiones homólogas de la otra. Para ello es adecuado proporcionar a cada alumno una copia de las dos imágenes y que mediante regla y calculadora comprueben que la razón de semejanza se mantiene. Se les pedirá también que midan varios de los ángulos que forman los objetos geométricos de la imagen y que comprueben si permanecen invariantes.

Técnicas:

1. Calcular la razón de dos segmentos.
2. Identificar y describir invariantes entre dos figuras semejantes.
3. Identificar polígonos semejantes y deducir su razón de semejanza.
4. Medida de ángulos.

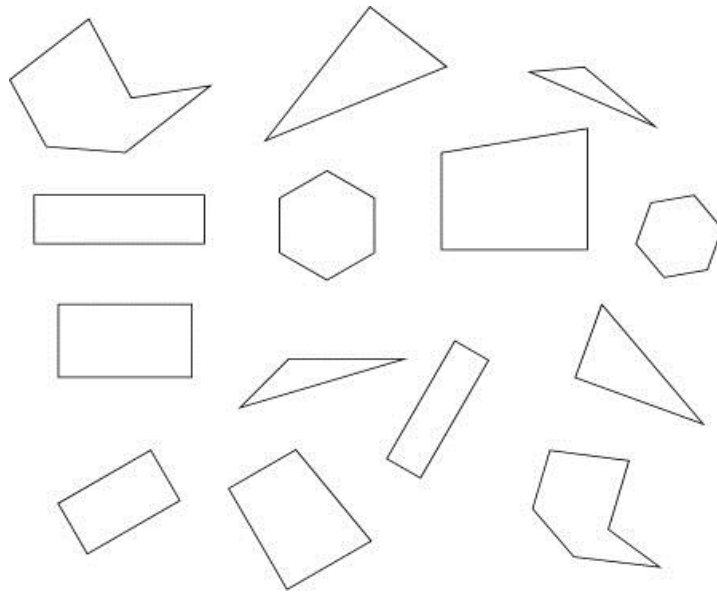
Tecnología:

Definición del concepto de semejanza: *Dos figuras diferentes son semejantes cuando solo difieren en su tamaño. En ese caso los segmentos correspondientes son proporcionales y los ángulos entre lados homólogos iguales. Llamaremos razón de semejanza a la constante de proporcionalidad entre lados homólogos.*

Problema 2: Figuras semejantes.

En la imagen se muestran una serie de polígonos. Identifica qué tipo de polígono es cada uno y compara sus formas. Si es necesario puedes utilizar un transportador para medir los ángulos y regla para medir la longitud de los lados.

Una vez que hayas estudiado las figuras, señala los polígonos que identifiques como semejantes. Calcula la razón de semejanza.



Reflexiona sobre las siguientes afirmaciones e indica si son verdaderas o falsas. Si son falsas pon algún ejemplo que lo demuestre:

- 1.- Dos cuadrados cualesquiera son siempre semejantes.
- 2.- Dos rombos cualesquiera son siempre semejantes.
- 3.- Dos rectángulos cualesquiera son siempre semejantes.
- 4.- Dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes.

Metodología:

Para reforzar el concepto de semejanza se presenta a los alumnos una serie de polígonos de distintas formas entre los cuales hay figuras semejantes y se les pide que identifiquen qué figuras son semejantes entre sí. En esta colección de figuras semejantes se ha introducido, además del cambio de tamaño, una rotación de la forma geométrica, con la intención de habituar a los alumnos a visualizar situaciones más generalizadas de la semejanza y de esta manera salir del prototipo visual que han adquirido en la etapa de educación primaria. El problema intenta generar en los alumnos la pregunta: ¿cómo podemos asegurar que dos figuras son semejantes?

Técnicas:

1. Visualización en posiciones diferentes a las figuras prototípicas.
2. Identificar y describir invariantes entre dos figuras semejantes.
3. Proporcionalidad de segmentos.

4. Medida de ángulos.

5. Identificar polígonos semejantes y deducir su razón de semejanza.

Tecnología:

Concepto de semejanza.

La rotación de figuras geométricas no se introduce como una transformación del plano, sin embargo, merece la pena dedicar algo de tiempo a que los alumnos comprendan que rotaciones, simetrías y traslaciones no modifican las relaciones de proporcionalidad de segmentos e invariancia de ángulos de una figura, y por tanto, sus características de semejanza respecto a otra figura.

Problema 3: Sobre la interpretación de planos.

El siguiente plano de un piso se da en una escala de 1:150.



1.-Calcula las dimensiones de cada una de las habitaciones.

2.- En la pared donde están colocados los electrodomésticos de la cocina queremos poner un lavavajillas de 50 cm de ancho, una nevera de 60 cm y varios muebles de 40cm, ¿cuántos muebles de 40cm cabrán?

3.- Queremos colocar un suelo de parquet en los dormitorios. El precio del parquet es de 7,85 Eur/m², cuanto nos costará el material.

Metodología:

La resolución de este problema profundizará en el concepto de escala, aplicado a planos y a la obtención de datos a partir de los mismos. Este problema se trabajará en grupo, se proporcionará un plano a cada uno de los grupos y se les pedirá que respondan con sus conocimientos actuales las preguntas anteriores.

Técnicas:

1. Medida de segmentos.
2. Aplicación del factor de escala.
3. Aplicación de proporcionalidad.

Tecnología:

La tecnología en este caso consiste en la adecuada definición de escala y los tipos de escala. El concepto de escala se definirá de la siguiente manera:

La escala es la relación matemática que existe entre las dimensiones reales de un objeto y las dimensiones de su reproducción o representación, es decir, se escriben en forma de razón donde el antecedente indica el valor del plano y el consecuente el valor de la realidad. Por ejemplo, si tenemos 1:20 o 1/20 significa que cada metro del mapa son 20 metros en la realidad. Otro ejemplo, si tenemos 1:500000 tenemos que cada centímetro del mapa, en la realidad son 500000 centímetros, es decir, 5 kilómetros.

Problema 4: Figuras semejantes

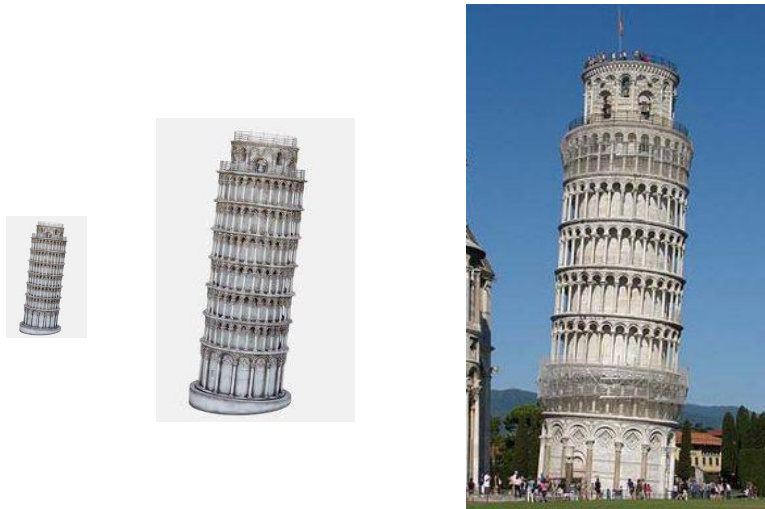
Si viajamos a Pisa podemos visitar su famosa torre inclinada, encontraremos también muchas tiendas de souvenirs donde se venden reproducciones de la torre en diferentes dimensiones. Analizamos dos de ellas, una cuya altura es de 20 cm y otra más pequeña cuya altura es de 8 cm.

¿Dirías que las dos figuras son semejantes? ¿Podrías calcular la razón de semejanza entre ellas?

Si el diámetro de la torre pequeña es de 2,2 cm, ¿cuál es el diámetro de la torre mayor?

Imagínate que estas en Pisa y utilizando la maqueta de 20cm de altura decides estimar la altura de la torre. Para ello cuentas los pasos que necesitas dar para rodear la

torre, dando 47 pasos para dar una vuelta completa. Supón que cada paso es de aproximadamente 1m. ¿Puedes dar una estimación de la altura de la torre?



Metodología:

La situación planteada proporciona a los alumnos la idea de que los planos, mapas y maquetas representan la realidad por ser una reproducción semejante. La relación entre la realidad y el plano o maqueta viene dada por la razón de semejanza. Estas representaciones semejantes son de gran utilidad en la interpretación y conocimiento de la realidad.

Técnicas:

1. Cálculo de la razón de proporcionalidad.
2. Aplicación de proporcionalidad entre figuras semejantes.

Tecnología:

Semejanza entre cuerpos geométricos y proporcionalidad. Se puede aprovechar este problema para resaltar el hecho de que todas las circunferencias son semejantes entre sí.

Problema 5: Homotecia.

Dada una figura, ¿Cómo podemos construir una figura semejante con una razón de proporcionalidad dada?

Dibuja una figura semejante utilizando la cuadrícula ampliada. Marca cada uno de los vértices de la figura 1 en la cuadrícula ampliada, después mide la longitud de los segmentos y completa la tabla:

Figura 1:

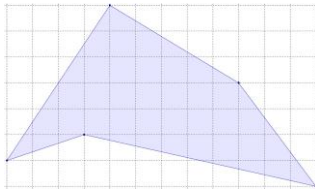
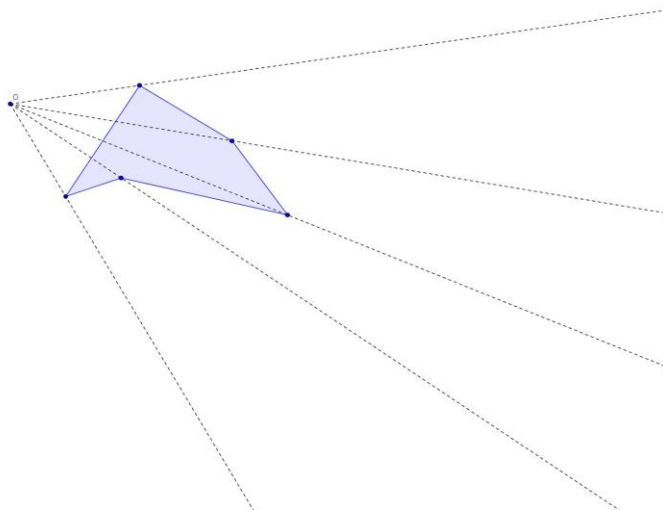


Figura 2:



Segmento	Fig. 1	Fig. 2	L2/L1
a			
b			
c			
d			
e			

Otro método posible es el de la homotecia: marca en cada recta un punto cuya distancia al centro O sea el doble que la distancia al vértice de la figura que pertenece a la recta, después une los nuevos puntos. Igual que antes, mide la longitud de los segmentos y completa la misma tabla. Mide también los ángulos de las figuras y comprueba si los ángulos homólogos son iguales.



Construye otras figuras semejantes a partir de otros polígonos utilizando la homotecia con razones de proporción: 0.7, 1.3 y 3.5.

Metodología:

La idea de este problema es que los alumnos conozcan herramientas para poder crear figuras semejantes y que se afiance el concepto de proporcionalidad entre segmentos de figuras semejantes.

Es también una actividad idónea para empezar a trabajar con Geogebra a un nivel básico. Es decir, ambas construcciones pueden ser reproducidas en Geogebra y los alumnos pueden fácilmente experimentar modificando la razón de proporcionalidad, el centro de homotecia, el tamaño de cuadrícula, etc. (ver anexo). Se trabajará con los alumnos los casos concretos en los que el centro de homotecia coincida con uno de los vértices del polígono y el caso de rectángulos semejantes en los que el centro de homotecia coincida con el centro del rectángulo.

Una vez estudiado el teorema de Thales se pedirá a los alumnos que vuelvan a la homotecia e intenten encontrar parejas de triángulos semejantes en posición de Thales, razonando por qué el segmento resultante de la figura ampliada mantiene la misma razón de proporcionalidad a la utilizada para encontrar los vértices de la nueva figura.

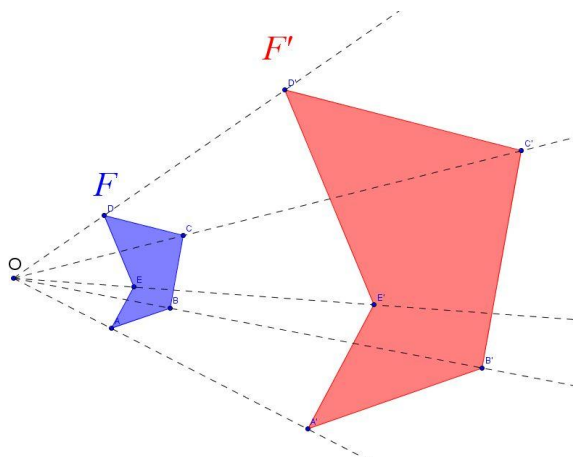
Técnica:

La técnica que se trabaja en este caso es el de la construcción de figuras semejantes mediante los métodos de cuadrícula y de homotecia.

Tecnología:

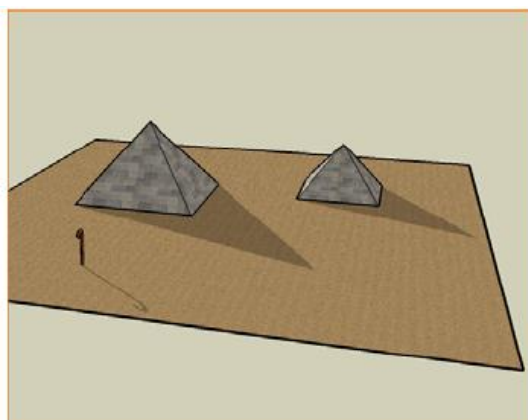
Se explicará la homotecia como una transformación geométrica que a partir de una figura dada nos permite construir figuras semejantes.

Se llama homotecia de centro O y razón k (distinto de cero) a la transformación que hace corresponder a un punto A otro A' , alineado con A y O , tal que: $OA' = k \cdot OA$. Si $k > 0$ se llama homotecia directa y si $k < 0$ se llama homotecia inversa.



Problema 6: Cálculo de la altura de un objeto mediante su sombra.

Se cuenta que estando Thales de Mileto en Egipto y conocida su fama de hombre sabio, se le retó a que calculase la altura de una de las pirámides. Para el ser humano siempre ha resultado difícil medir y controlar las distancias verticales, ya que en el momento que esas distancias superaban ligeramente su propia estatura se convertían en inaccesibles. Por este motivo, desde muy antiguo, el ser humano ha buscado e ideado estrategias que le permitieran determinar esas distancias inaccesibles. Según se ha transmitido desde la cultura griega, Thales clavó su bastón en la arena y midió la sombra que proyectaba, estableciendo una proporción entre la longitud del bastón y la sombra de éste con la altura de la pirámide y la sombra que proyectaba en ese momento. Representa mediante un dibujo esquemático como resolvió Thales el problema y explícalo. La figura siguiente te puede servir de ayuda.



Metodología:

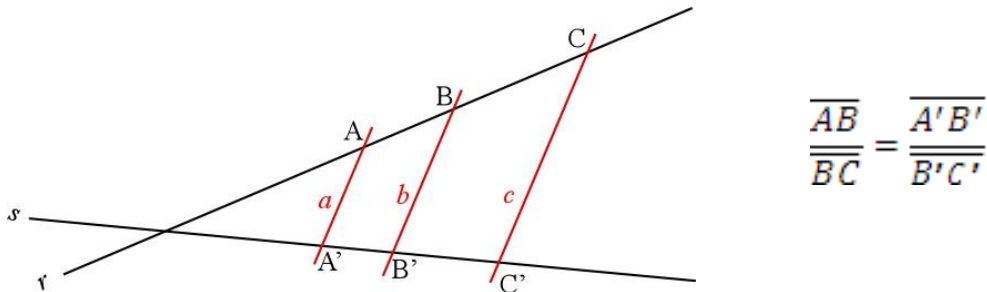
Este problema nos va a servir como introducción del teorema de Thales, y nos contextualiza la aparición histórica del mismo. A partir de este problema se enunciará el teorema de Thales, se definirán los triángulos en posición de Thales y se aprenderá a reconocerlos, para ello se pondrán ejemplos de varias configuraciones. El problema induce a los alumnos la necesidad de representación esquemática del problema y de expresar mediante el lenguaje un razonamiento matemático. Se acompaña el problema con un archivo geogebra para que los alumnos lo trabajen en casa (ver anexo).

Técnica:

1. Identificación de triángulos semejantes.
2. Aplicación de proporcionalidad de lados homólogos entre triángulos semejantes.

Tecnología:

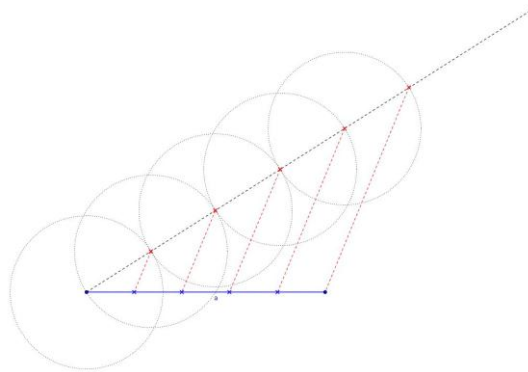
Teorema de Thales: Si las rectas a , b y c son paralelas y cortan a otras dos rectas, r y s , entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales:



Problema 7: División de un segmento en partes iguales.

Una aplicación directa del teorema de Thales nos permite dividir en partes iguales cualquier segmento sin necesidad de medir su longitud. Para ello basta utilizar herramientas de dibujo: regla, compás, escuadra y cartabón.

Observa el dibujo siguiente en el que se ha dividido el segmento a en 5 partes iguales. Analiza cómo se han construido las divisiones. Dibuja un segmento en tu cuaderno y divídelo en 3 partes iguales usando la misma técnica.

**Metodología:**

La intención de este problema es que los alumnos vean una aplicación directa del teorema de Thales y que razonen y expliquen por qué funciona esa técnica. Es importante también que el alumno utilice las herramientas de dibujo y sea capaz de representar correctamente los elementos solicitados. En este problema los alumnos analizarán la figura e intentarán descubrir cuál ha sido el método utilizado para la división del segmento. Una vez descubierto el método los alumnos tienen que ponerlo

en práctica en una construcción propia.

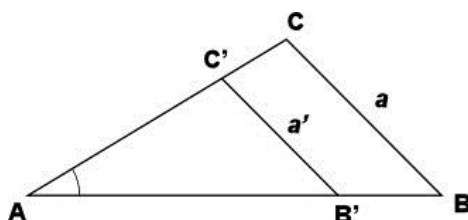
Técnica:

1. Identificación de triángulos semejantes.
2. Aplicación del teorema de Thales.
- 3.- Dibujo con regla y compás.

Tecnología:

La tecnología que se utiliza en este problema es el teorema de Thales, pero nos va a permitir introducir el concepto de triángulos en posición de Thales.

Triángulo en posición de Thales: *Los triángulos ABC y AB'C' tienen un ángulo común, el \hat{A} . Es decir, el triángulo pequeño está encajado en el grande. Además, los lados opuestos a \hat{A} , a y a' son paralelos. En estos casos decimos que estos dos triángulos están en posición de Thales. Dos triángulos en posición de Thales son semejantes.*

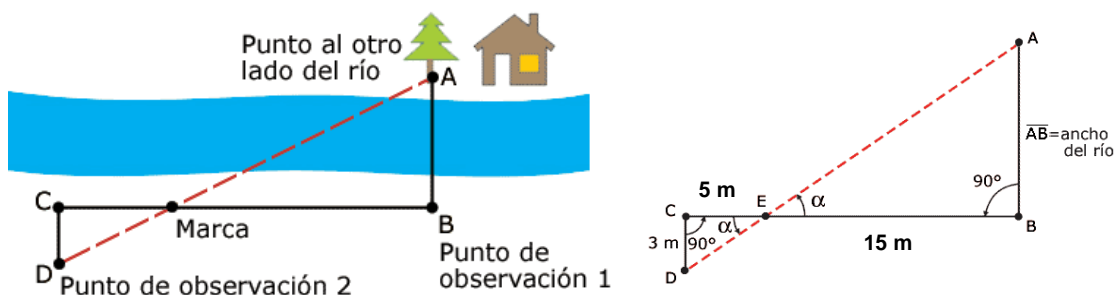


En este caso se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{a'} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$$

Problema 8: Semejanza de triángulos.

Existe un método utilizado desde muy antiguo para medir la anchura de un río sin necesidad de cruzarlo. Este método se basa en la aplicación de las propiedades de los triángulos semejantes. Observa los dibujos y calcula la anchura del río.



Metodología:

Este problema se abordará mediante trabajo en grupo, la idea es que los alumnos sean capaces de reconocer y justificar que los dos triángulos son semejantes y que, por tanto, pueden aplicar la proporcionalidad entre lados homólogos. El profesor actuará como orientador para aquellos grupos a los que les resulte más difícil encontrar las relaciones adecuadas. Este problema se ha representado también en geogebra para que pueda ser utilizado por los alumnos (ver anexo).

Técnica:

Proporcionalidad.

Semejanza de triángulos.

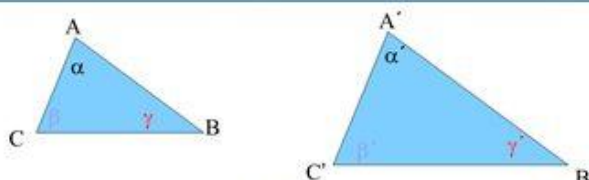
Triángulos en posición de Thales inversa.

Reconocimiento de lados homólogos.

Tecnología:

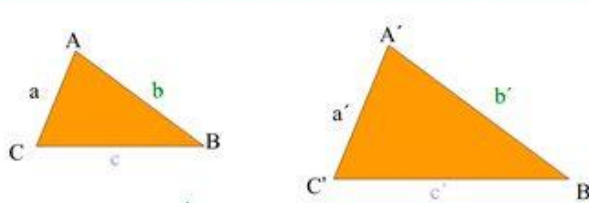
El problema da pie a introducir los criterios de semejanza de triángulos, que les serán útiles para su aplicación en problemas posteriores. Este momento de institucionalización de los criterios de semejanza correrá a cargo del profesor, estableciéndose los criterios:

Criterio AA (Ángulo, Ángulo). Si dos de sus ángulos son iguales.

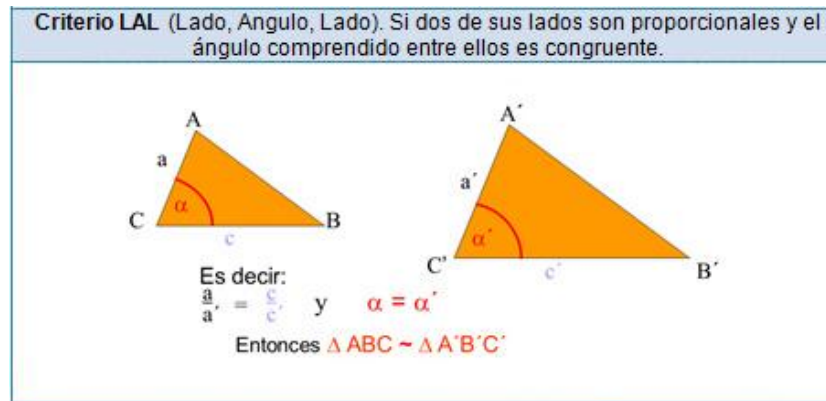


Es decir: Si $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ de lo anterior se deduce que $\gamma = \gamma'$
Entonces, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Criterio LLL (Lado, Lado, Lado). Si sus tres lados son proporcionales.



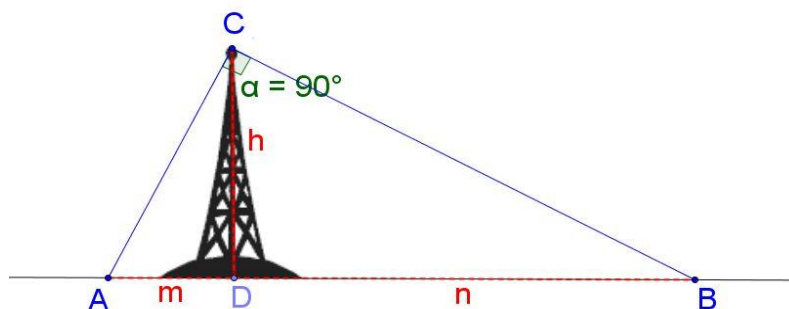
Es decir: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = K$
Entonces, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
El cociente obtenido de comparar los lados homólogos entre sí recibe el nombre de **razón de semejanza**



Problema 9: Cálculo de la altura de una antena.

Una antena de telecomunicaciones está anclada al suelo y asegurada mediante dos cables de acero tirantes que forman entre sí un ángulo de 90° . Necesitamos conocer la altura de la antena pero no tenemos medios para subir a ella. Para ello medimos en el suelo la distancia desde el pie de la antena a los puntos de anclaje de los cables, obteniendo que $m=5$ metros y $n=17$ metros.

Observa el dibujo e intenta encontrar una forma de calcular la altura de la antena.



Metodología:

Se formarán grupos de dos alumnos para que en conjunto piensen y discutan posibles estrategias de resolución. El profesor actuará como guía dando indicaciones y lanzando preguntas más concretas que conduzcan a los alumnos a la solución. Se trata de que mediante el trabajo en grupo puedan aparecer ideas y estrategias de resolución del problema. Si los alumnos encuentran dificultad en encontrar las relaciones es posible trabajarlo en clase con geogebra (ver anexo).

Técnica:

Semejanza de triángulos rectángulos

Proporcionalidad

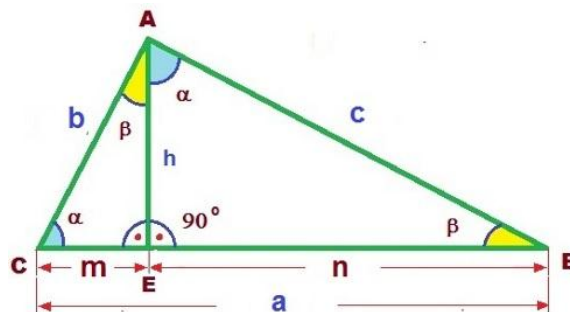
Tecnología:

Una vez resuelto el problema se realizará la institucionalización del resultado como el teorema de la altura:

En cualquier triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa es la media geométrica entre las proyecciones ortogonales de los catetos sobre la hipotenusa.

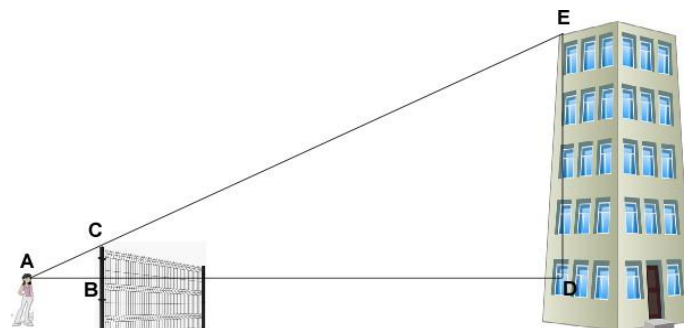
La altura del triángulo rectángulo ABC lo divide en dos triángulos rectángulos semejantes, de forma que: $m/h=h/n$

De donde se obtiene que: $h^2=mn$



Problema 10: Cálculo de la altura de un edificio a través de visuales.

Utilizando como ayuda una valla alta cercana a un edificio podemos determinar la altura del edificio tomando medidas de distancia horizontal, de altura de la valla y de nuestra posición de observación. Observa el dibujo y calcula la altura del edificio, sabiendo que la altura desde el suelo hasta la línea de visión es de 1.60m, la altura de la valla es de 3.10m, y las distancias horizontales son: desde la chica hasta la valla 2.50m y desde la valla hasta el edificio 24m.



Metodología:

El problema se presenta para que los alumnos vean una aplicación directa de la semejanza de triángulos. Se pretende que el alumno sea capaz de reconocer los

triángulos semejantes y aplicar correctamente las relaciones de proporcionalidad. El problema se puede plantear para resolverlo en grupos de dos alumnos.

Técnica:

Reconocimiento de triángulos semejantes.

Aplicación de proporcionalidad.

Tecnología:

Para la resolución de este problema deberán basarse en las tecnologías que han aparecido anteriormente. Concretamente utilizarán:

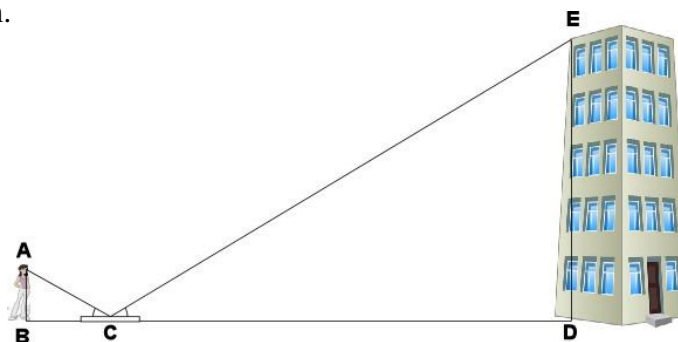
Semejanza

Criterios de semejanza de triángulos

Triángulos en posición de Thales

Problema 11: Cálculo de la altura de un edificio utilizando un espejo.

Otro método que es posible utilizar para determinar la altura de un edificio es mediante el empleo de un espejo. En este caso se coloca un espejo en el suelo y, dado que los ángulos de incidencia y reflexión son iguales, podemos calcular la altura del edificio. Calcula de nuevo la altura del edificio sabiendo que $AB=1.60\text{m}$, $BC=2.20\text{m}$ y que $CD=24.30\text{m}$.



Metodología:

De la misma forma que el problema anterior, se pretende que los alumnos sean capaces de reconocer triángulos semejantes y aplicar la razón de semejanza. Tanto este problema como el anterior servirán para que los alumnos vean una aplicación práctica y a su alcance para aplicar sus conocimientos matemáticos. Les será también útil para el trabajo de representación del edificio que están realizando.

En este problema, al entrar en juego un espejo, los triángulos semejantes que se

forman son el producto de una inversión. Hasta el momento no se había encontrado esta situación en la secuencia didáctica por lo que será necesario dedicar algo de tiempo para asegurar que los alumnos entienden el concepto. Los problemas 10 y 11 se encuentran también representados en la colección de archivos geogebra, descrita en el anexo.

Técnica:

Reconocimiento de triángulos semejantes.

Aplicación de proporcionalidad.

Tecnología:

En cuanto a tecnologías este problema es exactamente igual que el anterior y no requiere la aplicación de otras.

Semejanza

Criterios de semejanza de triángulos

Triángulos semejantes con inversión.

Problema 12: Gulliver

En la novela “*Los viajes de Gulliver*”, de Jonathan Swift, Gulliver vaga por varios países extraños en su intento de volver a casa. Quizá el más conocido de todos los lugares que visitó es el país de Lílput, cuyos habitantes eran diminutos. Según cuentan en el libro, la altura de Gulliver era 12 veces la de los liliputienses. Cuando los liliputienses le pidieron a Gulliver que se quedara en su tierra se les presentaron ciertos problemas relacionados con su tamaño que los matemáticos al servicio del rey de Lílput intentaron resolver.

Basándote en tus conocimientos sobre semejanza intenta encontrar una solución a los dos siguientes problemas:

1. Para fabricar un colchón a la medida de Gulliver utilizaron sus propios colchones uniendo unos con otros. ¿Cuántos colchones tendrían que poner de largo para conseguir la largura suficiente para que sirviera a Gulliver? ¿y de ancho? ¿cuántos hacen falta en total para cubrir el área de todo el colchón?
2. Para alimentar a Gulliver el rey de Lílput le asignó una cantidad de comida equivalente a la necesaria para dar de comer a 1724 liliputienses. Gulliver quedó extrañado de una cifra tan exacta. Lee el siguiente párrafo donde le explican la razón de esa cifra.

“Pregunté algún tiempo después a un amigo mío de la corte cómo se les ocurrió fijar ese número precisamente, y me contestó que los matemáticos de Su Majestad, habiendo tomado la altura de mi cuerpo por medio de un cuadrante, y visto que excedía a los suyos en la proporción de doce a uno, dedujeron, tomando sus cuerpos como base, que el mío debía contener, por lo menos, mil setecientos veinticuatro de los suyos, y, por consiguiente, necesitaba tanta comida, como fuese necesaria para alimentar ese número de liliputienses. Por donde puede el lector formarse una idea del ingenio de aquel pueblo, así como de la prudente y exacta economía de tan gran príncipe.”

Suponiendo que el cuerpo de Gulliver era semejante al de los liliputienses, ¿eran tan exactos los cálculos?

Metodología:

En este caso se trata de entablar un debate en clase de manera que surja el hecho de relacionar áreas y volúmenes de figuras semejantes.

La intención de la segunda pregunta es que encuentren el error introducido intencionadamente por J. Swift en su novela como crítica irónica a la economía de los Estados.

Técnica:

Proporcionalidad de figuras semejantes.

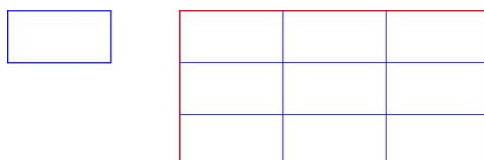
Área de un rectángulo.

Volumen de cuerpos.

Tecnología:

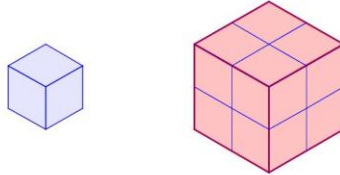
El problema hace necesario establecer la relación entre áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Aunque no se dará una demostración de esta relación, se sustentará la tecnología mostrando los siguientes ejemplos donde la relación de áreas y volúmenes se ve claramente.

Los rectángulos rojo y azul son semejantes, con razón de semejanza 3. Cada lado del rectángulo grande es el triple que la del pequeño, por tanto el área del grande es $3^2=9$ veces el área del pequeño.



En general, si la razón de semejanza de dos figuras es k , entonces la razón de sus áreas es k^2 .

Para encontrar la relación entre volúmenes de cuerpos semejantes fíjate en este ejemplo. La razón de semejanza es 2, y el volumen del cuerpo grande es $2^3=8$ veces el volumen del cuerpo pequeño.



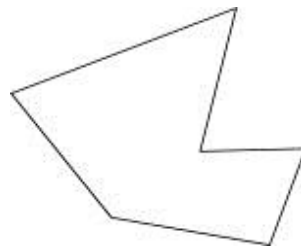
En general, si la razón de semejanza de dos cuerpos es k , entonces la razón de sus volúmenes es k^3 .

F. ACTIVIDADES PARA EJERCITAR LAS TÉCNICAS.

En el punto anterior se ha especificado qué técnicas se utilizan en la resolución de cada uno de los problemas que forman parte de la secuencia didáctica. Con el fin de que el alumno afiance el empleo de estas técnicas se proponen una serie de ejercicios y actividades para cada técnica principal.

- **Para practicar la técnica de construcción de figuras semejantes:**

1.- Construye una figura semejante a la siguiente con una razón de semejanza $1/3$.



- **Para practicar la técnica de identificación de figuras semejantes:**

2.- Dibuja y recorta rectángulos con las siguientes medidas:

12x6 cm; 8x5 cm; 4x3 cm; 9x4; 6x3 cm;

5x4 cm; 12x9 cm; 16x10 cm; 10x8 cm; 8x6cm

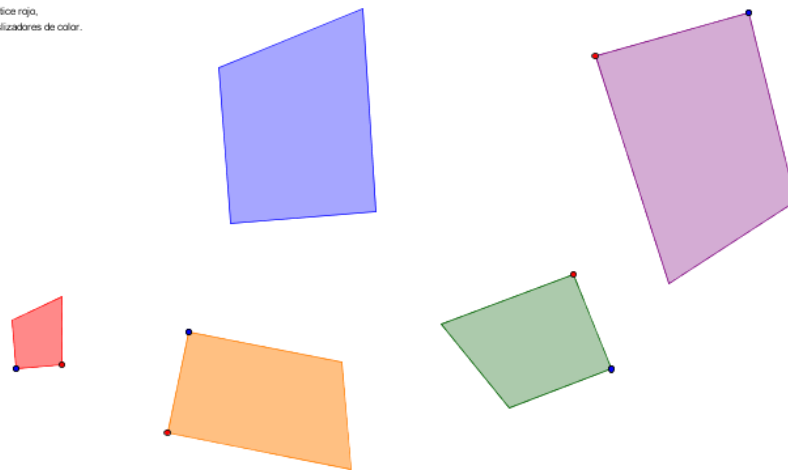
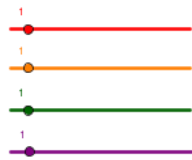
Determina cuales son semejantes entre sí.

- **Para practicar la identificación de figuras semejantes mediante transformaciones:**

3.- Utilizando Geogebra, identifica las figuras semejantes. Puedes trasladar las figuras arrastrando el vértice azul, y girarlas desplazando el vértice rojo. El tamaño de cada figura lo puedes variar utilizando los deslizadores de color.

Ejercicio 3:

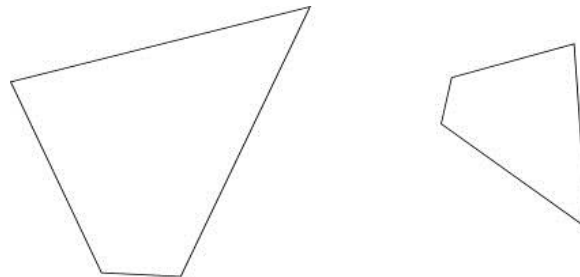
Identifica qué figura es semejante a la figura azul.
Puedes girar las figuras arrastrando el vértice rojo,
y ampliarlas o reducir las mediante los deslizadores de color.



- **Para practicar la técnica de cálculo de razón de semejanza:**

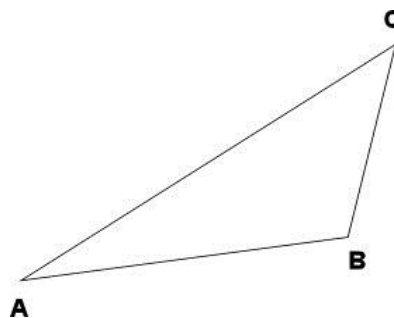
4.- Observa y mide los siguientes dibujos y contesta:

- ¿Son figuras semejantes?
- Si son figuras semejantes, ¿Cuál es la razón de semejanza?

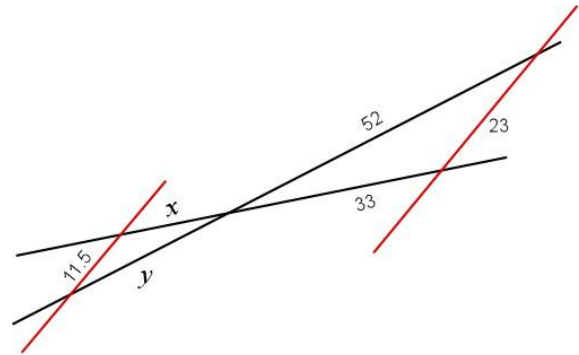
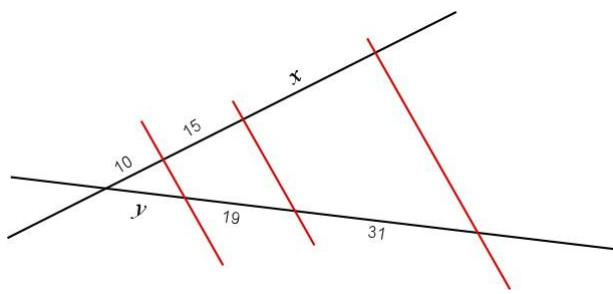


- **Para practicar la técnica de aplicación del teorema de Tales:**

5.- Aplicando el teorema de Tales construye un triángulo semejante al ABC siendo la razón de semejanza $1/2$.



6.- Sabiendo que las rectas de color rojo son paralelas, calcula el valor de x en y en las siguientes figuras:



- **Para practicar los criterios de semejanza de triángulos**

7.- Indica cuáles de las siguientes parejas de triángulos son semejantes y cuáles no. En caso afirmativo, determina la razón de semejanza.

a) 3, 4, 5 y 6, 8, 10

b) 6, 7, 8 y 7, 8, 9

8.- Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo de la misma amplitud ¿son semejantes? ¿Por qué?

Esta serie de actividades es solo un pequeño ejemplo de los tipos de ejercicios que los alumnos deben realizar para afianzar los conocimientos adquiridos en la resolución del campo de problemas. Tanto en los libros de texto como en la web se pueden encontrar multitud de ejercicios para que el alumno practique las técnicas.

G. SOBRE LAS TECNOLOGÍAS.

Las técnicas se justificarán mediante las definiciones correspondientes a cada concepto y mediante demostraciones sencillas, basadas en la visualización y comparación de figuras geométricas que hagan emerger las distintas propiedades de las figuras y triángulos semejantes.

La formalización de las definiciones correrá a cargo del profesor, aunque alguna de las técnicas se desarrollará por los propios alumnos con la guía del profesor.

Las tecnologías que se utilizan en la secuencia didáctica han sido descritas en el campo de problemas, apartado E. Para cada concepto proponemos un problema que de

entrada y resuelva la necesidad de esas nociones. La institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático se realiza una vez resuelto el problema asociado en el campo de problemas.

En el esquema siguiente se presentan los hitos principales de la secuencia didáctica. En rojo se resaltan los momentos de institucionalización llevados a cabo por el profesor.



H. SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA.

Como se ha descrito en la memoria, la propuesta didáctica tiene dos partes diferenciadas y que se trabajarán en paralelo. Por un lado el problema de representación del edificio del instituto, que se realizará en grupo y que tendrán que resolver los alumnos a partir de lo aprendido en clase relativo a la semejanza y por otro el campo de problemas que nos debe permitir introducir cada uno de los objetos matemáticos relacionados y las técnicas necesarias para la resolución de los mismos. Todo ello sustentado por una tecnología cuya institucionalización es responsabilidad del profesor.

La secuencia didáctica ha sido diseñada para su aplicación en 10 sesiones, incluyendo las actividades iniciales de repaso y la evaluación final del tema.

A continuación se indican cada una de las sesiones, las actividades a realizar en cada una de ellas y su duración temporal.

SESIÓN	ACTIVIDAD	DURACIÓN
1	Sesión de evaluación inicial de conocimientos. Explicación y organización del trabajo en grupo.	20 min 30 min
2	Introducción del concepto de semejanza. Realización de los problemas nº1 y nº 2.	15 min 35 min
3	Presentación del problema nº 3. Definición del concepto de escala y trabajo sobre el problema. Trabajo con los alumnos sobre el problema nº 4 para profundizar en el concepto de razón de proporcionalidad.	25 min 25 min
4	Construcción de figuras semejantes mediante homotecia y cuadrícula, problema nº 5. Esta sesión combinará parte de dibujo con papel y parte de utilización de Geogebra.	20 min 30 min
5	Introducción histórica del teorema de Thales, se les presentará el problema nº 6. Institucionalización del teorema de Thales. Realización de actividades para afianzar los conceptos.	20 min 20 min 10 min
6	Problema nº 7 sobre división de segmentos. Institucionalización del concepto de triángulos en posición de Thales. Explicación y resolución del problema nº 8 Definición de los criterios de semejanza de triángulos.	20 min 30 min
7	Problemas nº 9, sobre semejanza en triángulos rectángulos. Institucionalización del teorema de la altura. Revisión del avance del trabajo y resolución de dudas.	30 min 20 min
8	Problemas nº 10 y nº 11. Técnicas de obtención de distancias inaccesibles mediante semejanza de triángulos.	50 min

SESIÓN	ACTIVIDAD	DURACIÓN
9	Revisión de la evolución del trabajo en grupo. Se dedicará la sesión a la resolución de dudas para la terminación del trabajo y otras dudas acerca de los conceptos del tema.	50 min
10	Sesión de evaluación	50 min

I. EVALUACIÓN

Los criterios de evaluación quedan determinados en el currículo aragonés de ESO (Orden de 9 de mayo de 2007), en lo relativo al concepto de semejanza se establece que se tengan en cuenta los siguientes criterios:

Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes.

Se trata asimismo de utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, el cálculo de porcentajes, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad. Además, los estudiantes deberán reconocer la proporcionalidad entre las medidas de los lados homólogos y la igualdad de los ángulos entre dos triángulos o dos cuadriláteros semejantes, y emplearlas para resolver problemas sencillos de medidas indirectas; también deberán ser capaces de utilizar la homotecia para producir figuras semejantes de una razón dada y justificar la pertinencia de la construcción mediante la identificación de triángulos en la «posición de Tales», así como hacer la lectura de un plano o de un mapa, del cual se conozca la escala, en términos de medidas reales, y también trasladar al plano elementos de la realidad aplicándoles el factor de escala.

La evaluación será continua, de forma que a lo largo del desarrollo de la secuencia didáctica el profesor debe observar la evolución y progreso de sus alumnos en el proceso de aprendizaje y el desempeño en la resolución de los problemas planteados. Tanto el trabajo en grupo como la resolución del campo de problemas, que quedará reflejado en el cuaderno de clase de cada alumno, nos servirán para obtener información relevante para la evaluación del proceso de aprendizaje. El objetivo es que esta

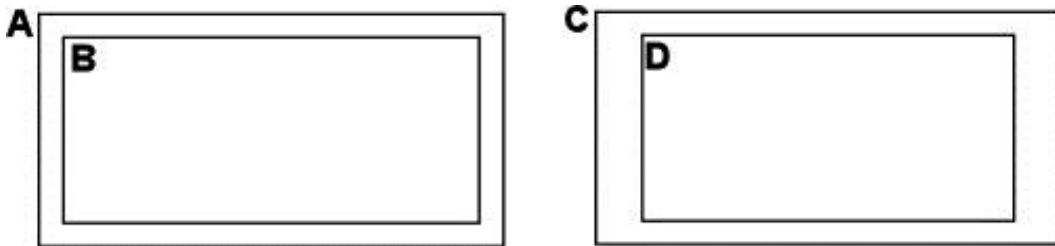
evaluación tenga un carácter formativo y nos permita actuar sobre la propia secuencia didáctica si es necesario.

En relación con la prueba de evaluación final, teniendo en cuenta los criterios de evaluación, se ha elaborado una prueba escrita para su realización en un tiempo aproximado de 50 minutos, y en la que el alumno debe aplicar los conocimientos adquiridos durante las sesiones anteriores.

Para la realización de la prueba los alumnos dispondrán de regla, calculadora y transportador de ángulos. Cada una de las preguntas vale un punto y para su corrección se tendrá en cuenta sobre todo si los conceptos han sido bien entendidos y aplicados por los alumnos.

Prueba de evaluación:

1. **Observa y mide estos rectángulos e indica si A es semejante a B y si C es semejante a D. Explica por qué:**



Objetivo de evaluación: Reconocer figuras semejantes y su comprobación mediante la proporcionalidad entre lados homólogos.

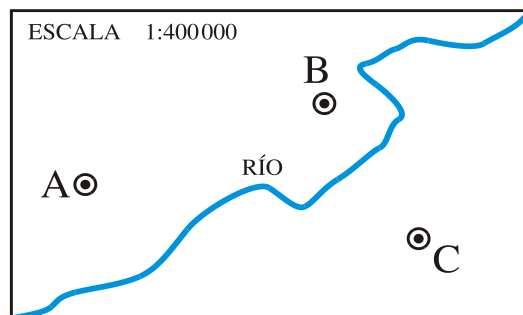
Respuestas esperadas: en esta pregunta se trata de comprobar si el alumno aplica técnicas multiplicativas o si el hecho de presentar rectángulos a cuyos lados se les ha sumado el mismo valor les lleva a confusión, lo que nos indicaría que el concepto de semejanza no se ha comprendido completamente.

2. **Los lados de un triángulo rectángulo miden 5 cm, 12 cm y 13 cm. Construye un triángulo semejante de forma que la razón de semejanza sea 1/2.**

Objetivo de evaluación: Conocer si el alumno comprende bien el concepto de semejanza de triángulos y si utiliza estrategias correctas para construir un triángulo semejante.

Respuestas esperadas: se comprueba en esta cuestión si el alumno es capaz de dibujar correctamente el triángulo definido en el enunciado, y a partir del dibujo realizado si aplica una estrategia correcta para dibujar el triángulo semejante: homotecia, triángulo en posición de Thales, dibujo directo de un triángulo rectángulo con lados en proporción 1/2.

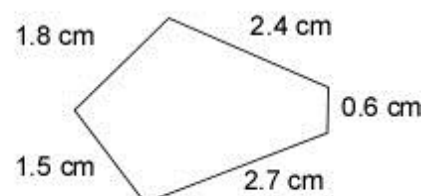
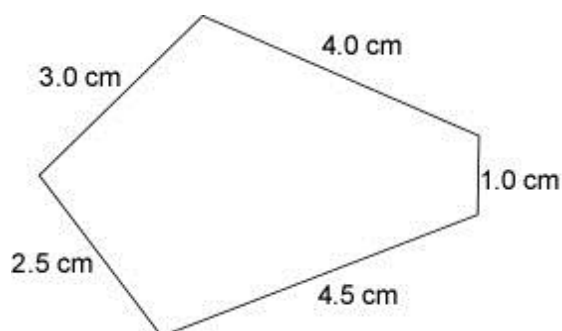
3. **Mide sobre el plano \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} y averigua cuáles son las verdaderas distancias entre los pueblos A, B y C.**



Objetivo de evaluación: En este problema se trata de averiguar si el alumno ha comprendido el concepto de escala y si es capaz de utilizar ese conocimiento para obtener medidas reales a partir de un plano.

Respuestas esperadas: Es de suponer que sea sencillo para el alumno obtener un resultado correcto aplicando el factor de escala a las medidas tomadas sobre el plano con una regla. Quizá encuentren mayor dificultad y cometan más errores en el manejo de unidades si quieren expresar la distancia real en unas unidades adecuadas.

4. **Observa la siguiente pareja de polígonos y estudia si son semejantes o no, sabiendo que los ángulos son iguales en las dos figuras. Si son semejantes, indica la razón de semejanza.**



Objetivo de evaluación: Comprobar si han asimilado bien la relación entre semejanza y proporcionalidad de lados homólogos.

Respuestas esperadas: Se espera que el alumno compruebe que la proporción entre lados homólogos es la misma y dado que en el propio enunciado se especifica que los ángulos son iguales llegue a la conclusión de que las figuras son semejantes.

5. *Calcula el área lateral y el área total de un cilindro de 2 metros de radio y 2,5 metros de altura. Para ello, dibuja esquemáticamente su desarrollo y señala sobre él los datos necesarios. Construye ahora un cilindro semejante cuyas longitudes sean 3 veces más grandes y calcula su área lateral y total. ¿qué relación existe entre las áreas de los dos cilindros?*

Objetivo de evaluación: Con este problema se trata de valorar si el alumno es capaz de representar una figura espacial y trabajar con ella el concepto de semejanza.

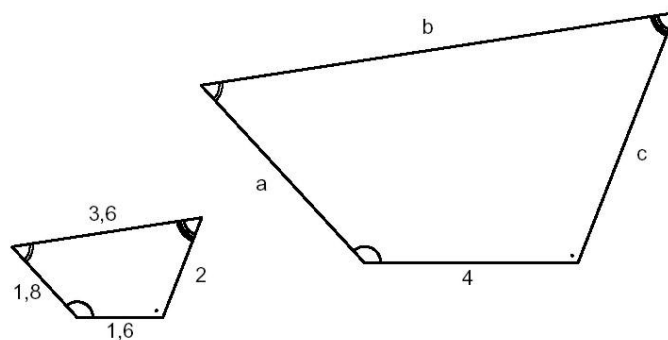
Respuestas esperadas: El alumno debe ser capaz de dibujar el desarrollo del cilindro y aplicar la constante de proporcionalidad para dibujar el cilindro ampliado y obtener las áreas que se piden. Si el alumno ha entendido bien la relación de áreas entre figuras semejantes no necesitará ningún cálculo para responder a la última pregunta.

6. *Un rectángulo tiene unas dimensiones de 15 cm x 20 cm. Si el lado menor de otro rectángulo semejante a él mide 6 cm, ¿cuánto mide el lado mayor?*

Objetivo de evaluación: Comprobar si el alumno aplica correctamente la proporcionalidad de segmentos en figuras semejantes.

Respuestas esperadas: Si el alumno tiende a utilizar estrategias aditivas es muy posible que este problema lo resuelva restando 9cm al lado mayor, obteniendo un rectángulo de 6x11cm, no semejante al original.

7. *Calcula las dimensiones en centímetros de los lados del cuadrilátero mayor.*



Objetivo de evaluación: Comprobar si el alumno es capaz de calcular la razón de semejanza entre figuras semejantes y aplica la proporcionalidad a los lados homólogos.

Respuestas esperadas: Se espera que el alumno identifique los lados homólogos y calcula la razón de semejanza: $r=4/1.16=2.5$. Una vez conocida la razón de semejanza que utilice la proporcionalidad entre segmentos con esa razón de semejanza.

8. Calcula la altura de un poste que proyecta una sombra de 21 metros en el momento en que una estaca de 2 m proyecta una sombra de 3,5 metros.

Objetivo de evaluación: Comprobar si el alumno es capaz de dibujar la situación descrita y aplica la proporcionalidad a los lados homólogos.

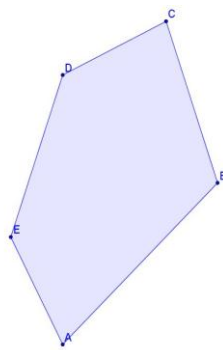
Respuestas esperadas: Se espera que el alumno represente dos triángulos rectángulos semejantes y que sea capaz de calcular la altura por medio de la proporcionalidad.

9. En el triángulo ABC, $\widehat{A}=55^\circ$ y $\widehat{B}=90^\circ$, el triángulo A'B'C', $\widehat{C}'=35^\circ$ y $\widehat{B}'=90^\circ$. ¿Son estos triángulos semejantes?

Objetivo de evaluación: Comprobar si se conocen los criterios de semejanza de triángulos.

Respuestas esperadas: Se espera que el alumno sea capaz de calcular el ángulo desconocido de ambos triángulos y que utilice los criterios de semejanza de triángulos para contestar afirmativamente.

10. Utilizando un procedimiento de homotecia, construye el pentágono A'B'C'D'E' semejante al ABCDE con razón de semejanza 0,6.



Objetivo de evaluación: Evaluar si se conoce y utiliza correctamente el método de homotecia para dibujar figuras semejantes.

Respuestas esperadas: Se deja libertad para seleccionar el centro de homotecia,

dependiendo de cómo se realice esa elección el alumno podría encontrar mayores dificultades para dibujar correctamente la figura.

La prueba de evaluación descrita nos proporcionará información acerca de si los conceptos han sido aprendidos por cada estudiante y si son capaces de ponerlos en práctica. A partir de los resultados obtenidos sería conveniente revisar la secuencia didáctica.

J. BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS WEB

Legislación:

ORDEN de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

ORDEN de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Libros de Texto:

J. Colera, I. Gaztelu (2003). *Matemáticas 2º de ESO, En tus manos*. Editorial Anaya.

J.R. Vizmanos, M- Anzola, J. Peralta, J. Bargueño (2002). *Matemáticas 2º de ESO, GAUSS*. Editorial SM.

C. Bailo, R. Casals, A. Gomá, J. Tudurí (1996). *Segundo ciclo de ESO, 3º Matemáticas*. Editorial Teide.

M. Bosch, A. Compta, J. Gascón, P.M.G. Urbaneja, J.M. Lamarca (1996) *Matemáticas, 3º de ESO*. Editorial Almadraba.

A. Compta, J. Gascón, J.M. Lamarca, P.M. González (1995). *2n cicle/1r curs Matemàtiques*. Editorial Castellnou.

Bibliografía:

C.B. BOYER (2001). *Historia de la matemática*. Madrid. Alianza Editorial

G. BROUSSEAU (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques en Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 7, N. 2. 33-115.

I. ESCUDERO (2003). La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje en la relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Granada. 2003

I. ESCUDERO (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos

oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(3), pp. 379-392.

F. FOUZ . Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. *Un Paseo por la Geometría*.

GRUPO BETA (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid. Editorial Síntesis.

E. GUALDRÓN y A. GUTIÉRREZ (2006). Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza. *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 63-82 .

E. GUALDRÓN y A. GUTIÉRREZ (2007). Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la semejanza. *XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 369-380.

A. GUTIÉRREZ (1998). Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización. *Encuentro de Investigación en Educación Matemática, TIEM-98* .

A. GUTIÉRREZ (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Vol. 20, num. 2-3, pp. 27-46.

C. LEMONIDIS (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(23), pp. 295-324.

C. LEMONIDIS (1997). A few remarks regarding the teaching of geometry through a theoretical analysis of the geometrical figure. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* 30, No. 4, pp. 2087-2095.

C. MALLOY (2002). The Van Hiele framework. *Navigating through Geometry in Grades 6-8*. National Council of Teachers of Mathematics.

A. QUINTERO, M. MOLAVOQUE y E. GUACANEME (2012). Diferencia entre semejanza y proporcionalidad geométrica desde una perspectiva histórica. *Revista de Ciencias*, Vol. 16, pp. 75-85.

USÓN. *Construcción de un Modelo Epistemológico de Referencia*. Capítulo 3, tesis doctoral.

Páginas web:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_semejanza_teorema_pitagoras/2esoquincena7.pdf

http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/wikididactica/index.php/Semejanza_Teorema_de_Pit%C3%A1goras_EDAD

http://www.educ.ar/dinamico/UnidadHtml_get_6439a2c5-c850-11e0-8202-e7f760fda940/index.htm