

Volúmenes de proyecciones de cuerpos convexos y la desigualdad de Zhang



Beatriz Marín Gimeno
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: David Alonso Gutiérrez
9 de junio de 2023

Resumen

La geometría convexa es una rama de las matemáticas cuyo estudio se centra en los cuerpos convexos, que son conjuntos convexos, compactos y de interior no vacío. Para ello, utiliza diferentes herramientas de teoría de la medida y análisis funcional.

Un resultado geométrico clásico es la desigualdad isoperimétrica que afirma que entre todos los cuerpos convexos $K \subseteq \mathbb{R}^n$ de igual volumen, $|K|$, la bola Euclídea, B_2^n , es la que tiene menor área de superficie $|\partial K|$:

$$\frac{|\partial K|}{|K|^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{|\partial B_2^n|}{|B_2^n|^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Observando esta desigualdad vemos que, si bien la cantidad

$$\frac{|\partial K|}{|K|^{\frac{n-1}{n}}}$$

es invariante por dilataciones de K , no lo es por transformaciones afines. En 1965, Petty demostró que de entre todos los cuerpos convexos $K \subseteq \mathbb{R}^n$, aquel que maximizaba la cantidad que sí es invariante por transformaciones afines dada por $|K|^{n-1}|\Pi^*K|$, donde Π^*K es otro cuerpo convexo llamado cuerpo de proyección polar de K , se maximiza cuando K es la bola Euclídea B_2^n , obteniendo así una desigualdad más fuerte que la desigualdad isoperimétrica en donde las cantidades involucradas son invariantes por transformaciones afines:

$$|K|^{n-1}|\Pi^*K| \leq |B_2^n|^{n-1}|\Pi^*B_2^n| = \left(\frac{|B_2^n|}{|B_2^{n-1}|}\right)^n.$$

En 1991, Zhang demostró que la cantidad dada por $|K|^{n-1}|\Pi^*K|$ se minimiza cuando K es un simplex n -dimensional, obteniendo la siguiente desigualdad:

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n^n} \leq |K|^{n-1}|\Pi^*K|.$$

El objetivo de este trabajo es demostrar la desigualdad de Zhang. Para ello, primero se verá la desigualdad de Brunn-Minkowski:

$$|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \leq |A+B|^{\frac{1}{n}},$$

que se obtendrá como consecuencia de la desigualdad de Prépoka-Leindler y es un resultado fundamental en geometría convexa ya que permite demostrar la concavidad de ciertas funciones. Después se verá la desigualdad de Berwald

$$\left(\frac{\binom{\gamma_2+n}{n}}{|K|} \int_K f(x)^{\gamma_2} dx\right)^{\frac{1}{\gamma_2}} \leq \left(\frac{\binom{\gamma_1+n}{n}}{|K|} \int_K f(x)^{\gamma_1} dx\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}.$$

que es una desigualdad de Hölder inversa para funciones cóncavas añadiendo unos pesos que dependen de la dimensión y de unas constantes positivas con $\gamma_1 < \gamma_2$.

Un resultado que será muy importante es que

$$\|x\|_2 |P_{x^\perp} K|$$

define una norma sobre \mathbb{R}^n y la bola unidad dada por esa norma es el cuerpo de proyección polar $\Pi^* K$.

Además se verá que

$$|K|^{n-1} |\Pi^* K|$$

es invariante afín.

Utilizando todos estos resultados, se darán dos demostraciones de la desigualdad de Zhang. La primera, cuya demostración es bastante reciente, se obtendrá como consecuencia de la desigualdad de Berwald. Esta demostración se llevó a cabo con la finalidad de obtener una desigualdad de Zhang discreta. La segunda demostración se apoyará en la función covariograma y en los cuerpos de θ -convolución, la cual nos permitirá ver que si K es un simplex n -dimensional se da la igualdad en la desigualdad de Zhang.

Abstract

Convex geometry is a field of mathematics that studies the convex bodies, which are convex and compact sets with non-empty interior. In order to do that, it uses different results from measure theory and functional analysis.

A standard result is the isoperimetric inequality which states that among all convex bodies $K \subseteq \mathbb{R}^n$ with the same volume, $|K|$, the unit ball given by the Euclidean norm, B_2^n , is the convex body with smallest surface area $|\partial K|$:

$$\frac{|\partial K|}{|K|^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{|\partial B_2^n|}{|B_2^n|^{\frac{n-1}{n}}}.$$

If we observe this inequality we notice that the quantity given by

$$\frac{|\partial K|}{|K|^{\frac{n-1}{n}}}$$

is invariant by dilations of K but it is not invariant by affine transformations. In 1965, Petty proved that among all the convex bodies $K \subseteq \mathbb{R}^n$ the unit ball given by the Euclidean norm is the one that maximizes the affine invariant quantity $|K|^{n-1}|\Pi^*K|$, where Π^*K is a convex body called the polar projection body of K obtaining an inequality which is stronger than the isoperimetric inequality

$$|K|^{n-1}|\Pi^*K| \leq |B_2^n|^{n-1}|\Pi^*B_2^n| = \left(\frac{|B_2^n|}{|B_2^{n-1}|}\right)^n.$$

In 1991, Zhang proved that the quantity given by $|K|^{n-1}|\Pi^*K|$ is minimized when K is a simplex:

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n^n} \leq |K|^{n-1}|\Pi^*K|.$$

The aim of this project is to prove Zhang's inequality. In order to do that, we are going to prove Brunn-Minkowski's inequality:

$$|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \leq |A+B|^{\frac{1}{n}},$$

which is an important result in convex geometry since the concavity of some functions can be proved as a consequence of it. We will obtain Brunn-Minkowski's inequality as a consequence of Prépoka-Leindler's inequality. Then, we will prove Berwald's inequality

$$\left(\frac{\binom{\gamma_2+n}{n}}{|K|} \int_K f(x)^{\gamma_2} dx\right)^{\frac{1}{\gamma_2}} \leq \left(\frac{\binom{\gamma_1+n}{n}}{|K|} \int_K f(x)^{\gamma_1} dx\right)^{\frac{1}{\gamma_1}},$$

which is an inverse Hölder's inequality for concave functions with some weights which depends on the dimension and two positive constants $\gamma_1 < \gamma_2$.

An important result is that the expression given by

$$\|x\|_2 |P_{x^\perp} K|$$

defines a norm in \mathbb{R}^n and the unit ball given by this norm is the polar projection body Π^*K .

Besides, it will be proved that

$$|K|^{n-1}|\Pi^*K|$$

is invariant by affine transformations.

Finally, using the previous results, we will see two proofs of Zhang's inequality. The first one, which is really recent, was obtained in order to get a discrete Zhang's inequality, will be a consequence of Berwald's inequality. The second proof uses the covariogram function and the θ -convolution bodies. The last proof will allow us to see that if K is a simplex, equality is held in Zhang's inequality.

Índice general

Resumen	III
Abstract	V
1. Preliminares	1
2. La desigualdad de Brunn-Minkowski	7
3. La desigualdad de Berwald	11
4. El cuerpo de proyección polar y la desigualdad de Zhang	15
4.1. Proyecciones de cuerpos convexos y el cuerpo de proyección polar	15
4.2. La desigualdad de Zhang	17
4.2.1. Demostración de la desigualdad de Zhang como consecuencia de la desigualdad de Berwald	18
4.2.2. Otra demostración de la desigualdad de Zhang	21
4.2.3. Igualdad en la desigualdad de Zhang	24
Bibliografía	27

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo vamos a introducir algunos conceptos básicos de geometría convexa que usaremos a lo largo del trabajo, que pueden encontrarse en [9].

Comenzamos definiendo qué es un conjunto convexo y cuerpo convexo, ya que será el principal objeto de estudio.

Definición 1.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Se dice que A es convexo si $\forall x, y \in A$ y $\forall \lambda \in [0, 1]$ se tiene que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

Definición 1.2. Dado $K \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que K es un cuerpo convexo si es convexo, compacto y tiene interior no vacío.

Definición 1.3. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Se dice que K es simétrico si para todo $x \in K$ se tiene que $-x \in K$.

Definición 1.4. (Suma de Minkowski) Dados dos conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, se conoce como suma de Minkowski de esos conjuntos a:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

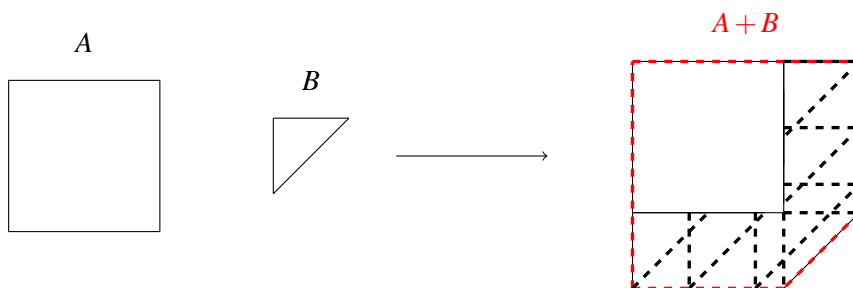


Figura 1.1: Suma de Minkowski.

Además, la suma Minkowski de conjuntos convexos es convexa, ya que dados $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, dos conjuntos convexos cualesquiera, y $x, y \in A + B$ podemos escribir x e y como suma de elementos de A y B . Luego, $x = a_1 + b_1$ e $y = a_2 + b_2$ con $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$. Entonces, por la convexidad de A y B , $\forall \lambda \in [0, 1]$ se tiene que:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda(a_1 + b_1) + (1 - \lambda)(a_2 + b_2) = (\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2) + (\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2) \in A + B.$$

A continuación, vamos a relacionar las normas con conjuntos convexos. Comenzamos dando la definición de norma en \mathbb{R}^n :

Definición 1.5. Sea $(\mathbb{R}^n, \cdot, +)$ un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Se dice que la aplicación $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ es una norma sobre \mathbb{R}^n si cumple:

- $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ y además se tiene $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. (*Desigualdad triangular*)

Además, la bola unidad cerrada dada por una norma es convexa y simétrica:

Proposición 1.6. Sea $\|\cdot\|$ una norma en \mathbb{R}^n y \mathbb{B} , la bola unidad cerrada dada por esa norma, es decir, $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Entonces, \mathbb{B} es un cuerpo convexo simétrico.

Recíprocamente, se tiene que dado K un cuerpo convexo con el 0 en su interior y simétrico, se puede definir una norma. Para ello introducimos primero la siguiente definición:

Definición 1.7. Dado K un cuerpo convexo con el 0 en su interior, se define el funcional de Minkowski como:

$$\|x\|_K = \inf \{ \lambda > 0 : x \in \lambda K \}.$$

Proposición 1.8. Si K es un cuerpo convexo simétrico y con el 0 en su interior, entonces el funcional de Minkowski es una norma en \mathbb{R}^n .

Definición 1.9. Sean $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se define la función radial de K en x como:

$$\rho_K(x) = \sup \{ \lambda > 0 : \lambda x \in K \}.$$

Además, dado K un cuerpo convexo y $x \neq 0$, el funcional de Minkowski y la función radial están inversamente relacionados:

$$\rho_K(x) = \sup \{ \lambda > 0 : \lambda x \in K \} = \sup \left\{ \lambda > 0 : x \in \frac{1}{\lambda} K \right\} = \frac{1}{\inf \{ \lambda > 0 : x \in \lambda K \}} = \frac{1}{\|x\|_K}.$$

Definición 1.10. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Se define la función soporte de K como:

$$h_K(x) = \sup \{ \langle x, y \rangle : y \in K \}.$$

Ahora, introducimos la función covariograma que utilizaremos en el Capítulo 4.

Definición 1.11. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Se define la función covariograma como $g_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g_K(x) = |K \cap (x + K)|$.

Notar que la función covariograma está soportada en $K - K = K + (-K)$ ya que

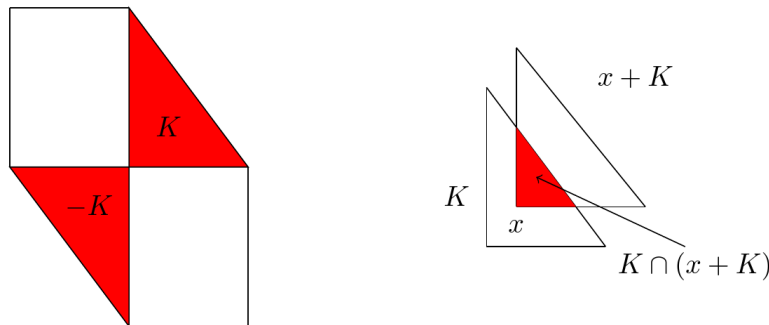


Figura 1.2: La función covariograma.

$$\begin{aligned} K - K &= \{x - y \in \mathbb{R}^n : x, y \in K\} = \{z \in \mathbb{R}^n : \exists x, y \in K, z = x - y\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^n : \exists x, y \in K, x = z + y\} = \{z \in \mathbb{R}^n : K \cap (z + K) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Luego, si $x \notin K - K$, entonces $g_K(x) = 0$. También se puede ver que $\max_{x \in K - K} g_K(x) = g_K(0) = |K|$.

En el siguiente capítulo, se verá que la raíz n -ésima de la función covariograma es una función cóncava, en $K - K$, como consecuencia de la desigualdad de Brunn-Minkowski.

En relación con la función covariograma, introducimos los siguientes cuerpos que se utilizarán en el Capítulo 4:

Definición 1.12. Sea K un cuerpo convexo. Dado $\theta \in [0, 1]$, se define el cuerpo de θ -convolución de K y $-K$ como:

$$\begin{aligned} K +_\theta(-K) &= \{x \in K - K : |K \cap (x + K)| \geq \theta |K|\} = \{x \in K - K : g_K(x) \geq \theta g_K(0)\} \\ &= \left\{ x \in K - K : g_K^{\frac{1}{n}}(x) \geq \theta^{\frac{1}{n}} g_K^{\frac{1}{n}}(0) \right\}. \end{aligned}$$

Denotaremos con B_2^n a la bola unidad n -dimensional dada por la norma $\|\cdot\|_2$, es decir,

$$B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}.$$

Definición 1.13. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo con $0 \in \text{int}(K)$. Entonces, se define el cuerpo polar de K como:

$$K^\circ = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sup_{x \in K} \langle x, y \rangle \leq 1 \right\}.$$

Dado $T \in GL(n) = \{T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; T \text{ es lineal y } \det(T) \neq 0\}$, también se tiene que $(TK)^\circ = T^{-t}K^\circ$, ya que:

$$\begin{aligned} (TK)^\circ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1 \quad \forall y \in T(K)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, T(y) \rangle \leq 1 \quad \forall y \in K\} \\ &= \{T^{-t}T^t(x) \in \mathbb{R}^n : \langle T^t(x), y \rangle \leq 1 \quad \forall y \in K\} \\ &= \{T^{-t}(z) \in \mathbb{R}^n : \langle z, y \rangle \leq 1 \quad \forall y \in K\} = T^{-t}(K^\circ). \end{aligned} \tag{1.1}$$

En particular, dado un $r > 0$, se deduce que:

$$(rK)^\circ = \frac{1}{r}K^\circ. \tag{1.2}$$

Como el objeto de estudio son los cuerpos convexos y no todo subconjunto de \mathbb{R}^n es convexo, introducimos los siguientes conceptos:

Definición 1.14. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cualquiera. Se define la envolvente convexa de X como el menor conjunto convexo de \mathbb{R}^n que contiene a X , es decir, es la intersección de todos los conjuntos convexos que lo contienen. Lo denotaremos por $\text{conv}\{X\}$.



Figura 1.3: Envolvente convexa de un conjunto X .

En particular, se puede definir la envolvente convexa de un número finito de puntos:

Definición 1.15. Se dice que un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un politopo, si es la envolvente convexa de un número finito de puntos. Es decir, $K = \text{conv} \{x_1, \dots, x_m\}$ con $x_i \in \mathbb{R}^n$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Teniendo en cuenta la definición anterior, podemos dar la definición del simplex n -dimensional que se utilizará en la última sección de Capítulo 4, cuando se vea el caso de igualdad en la desigualdad de Zhang.

Definición 1.16. Un simplex n -dimensional es la envolvente convexa de $n + 1$ puntos afínmente independientes en \mathbb{R}^n . Como caso particular se tiene:

$$\Delta^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n+1 \right\} = \text{conv} \{0, e_1, \dots, e_n\},$$

donde $(e_i)_{i=1}^n$ es la base canónica de \mathbb{R}^n .

En este trabajo denotaremos mediante $|\cdot|$ el volumen o medida de Lebesgue n -dimensional de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si A está contenido en un espacio afín k -dimensional entonces denotará la medida de Lebesgue k -dimensional.

Denotaremos por $\langle \theta \rangle$ el subespacio vectorial generado por θ , con $\theta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, es decir,

$$\langle \theta \rangle = \text{span} \{ \theta \} = \{ \lambda \theta : \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Además, dados $\theta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, denotaremos por $P_{\theta^\perp}(K)$ a la proyección de K sobre el hiperplano perpendicular a θ .

Notación 1.17. Denotaremos con \mathbb{S}^{n-1} a la esfera en \mathbb{R}^n , es decir, $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$.

A continuación, introducimos el cambio a coordenadas polares en \mathbb{R}^n :

Proposición 1.18. (Cambio a coordenadas polares) Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un función integrable en \mathbb{R}^n , entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} n r^{n-1} f(r\theta) |B_2^n| d\sigma(\theta) dr,$$

donde σ es la única medida sobre $\mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1})$ tal que $\sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$ y $\sigma(A) = \sigma(UA)$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1})$ y $\forall U \in O(n) = \{T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : \det(T) = 1, TT^t = I\}$, dada por

$$\sigma(A) = \frac{|\text{conv}\{0, A\}|}{|B_2^n|}.$$

Notar que σ es una medida de probabilidad.

El cambio a coordenadas polares nos permite expresar el volumen de un cuerpo K mediante la función radial del cuerpo como sigue:

$$\begin{aligned} |K| &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K = n |B_2^n| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-1} \chi_K(r\theta) dr d\sigma(\theta) = n |B_2^n| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{\rho_K(\theta)} r^{n-1} dr d\sigma(\theta) \\ &= |B_2^n| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_K^n(\theta) d\sigma(\theta). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Definición 1.19. Dado $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, se dice que ΠK es el cuerpo de proyección de K si cumple que su función soporte viene dada por la expresión:

$$h_{\Pi K}(x) = \|x\|_2 |P_{x^\perp} K|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

En el Capítulo 4 se verá que $\|x\|_2|P_{x^\perp}K|$ define una norma en \mathbb{R}^n . Para demostrar que define una norma, se verá otra forma de expresar $\|x\|_2|P_{x^\perp}K|$ en términos de una integral respecto de otra medida que no es la de Lebesgue que introducimos a continuación:

Definición 1.20. Sea (X, ρ) un espacio métrico. Para cualquier $U \subseteq X$, se define el diámetro de U (que se denotará por $diam(U)$) como:

$$diam(U) = \sup \{ \rho(x, y) : x, y \in U \}.$$

Entonces, dado $\delta > 0$ y $S \subseteq X$, se considera:

$$\mathcal{H}_\delta^n(S) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (diam U_i)^n : S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, diam U_i < \delta \right\}.$$

Entonces, tomando límite cuando $\delta \rightarrow 0$, se define la medida de Hausdorff n -dimensional de S como:

$$\mathcal{H}^n(S) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^n(S).$$

Capítulo 2

La desigualdad de Brunn-Minkowski

En este capítulo vamos a demostrar la desigualdad de Brunn-Minkowski, que fue demostrada por Brunn en 1887 en dimensiones 2 y 3 y por Minkowski en cualquier dimensión en 1896, para conjuntos convexos, si bien es cierta para conjuntos medibles Borel cualesquiera.

Esta desigualdad es fundamental en el estudio de la geometría convexa y afirma que la raíz n -ésima del volumen de la suma de dos Borelianos en \mathbb{R}^n es mayor o igual que la suma de las raíces n -ésimas de los volúmenes de dichos Borelianos. Esta desigualdad tendrá como consecuencia que algunas funciones que aparecerán en el estudio de la geometría de cuerpos convexos satisfagan algún tipo de concavidad. Para llegar a demostrarla comenzaremos con el siguiente lema.

Lema 2.1. Sea $\gamma > 0$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ una función tal que f^γ es integrable Borel en \mathbb{R}^n . Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\gamma dx = \int_0^{+\infty} \gamma t^{\gamma-1} |\{f(x) \geq t\}| dt.$$

Demostración. Sea $\gamma > 0$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ una función integrable tal que f^γ es integrable Borel en \mathbb{R}^n . Entonces, aplicando el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \gamma t^{\gamma-1} |\{f(x) \geq t\}| dt &= \int_0^{+\infty} \gamma t^{\gamma-1} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f(x) \geq t\}}(x) dx dt = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \gamma t^{\gamma-1} \chi_{\{f(x) \geq t\}}(x) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{f(x)} \gamma t^{\gamma-1} dt dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\gamma dx. \end{aligned}$$

□

Obtendremos la desigualdad de Brunn-Minkowski como consecuencia de la desigualdad de Prépoka-Leindler, la cual enunciamos y demostramos a continuación. Presentamos aquí la demostración dada por Ball en [5, Theorem 21], la cual puede encontrarse de manera más explícita en [8, Theorem 1.1., Lemma 1.2.] y [2, Theorem A.2, Theorem A.3].

Teorema 2.2. (Desigualdad de Prépoka-Leindler) Sean f, g y h tres funciones integrables Borel no negativas definidas en \mathbb{R}^n y $\lambda \in [0, 1]$ tales que $f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda \leq h(z)$, siempre que $z = (1-\lambda)x + \lambda y$. Entonces,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} h(z) dz. \quad (2.1)$$

Demostración. Realizamos la demostración por inducción sobre n .

Para $n=1$:

Supongamos primero que $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$, donde $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ cumplen las hipótesis del enunciado. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dos subconjuntos compactos no vacíos de \mathbb{R} . Entonces, es claro que:

$$A + B \supseteq (\text{mín}A + B) \cup (A + \text{máx}B)$$

y

$$(\text{mín}A + B) \cap (A + \text{máx}B) = \{\text{mín}A + \text{máx}B\},$$

que tiene volumen 0. Luego tenemos que

$$|A + B| \geq |A| + |B|$$

para subconjuntos compactos en \mathbb{R} y se tendrá también para borelianos en \mathbb{R} , ya que podemos aproximar los borelianos por conjuntos compactos.

Además, $\forall t \in [0, 1]$ y $\forall \lambda \in [0, 1]$ se tiene el contenido

$$\{z \in \mathbb{R} : h(z) \geq t\} \supseteq (1 - \lambda) \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\} + \lambda \{y \in \mathbb{R} : g(y) \geq t\},$$

ya que dado $z \in (1 - \lambda) \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\} + \lambda \{y \in \mathbb{R} : g(y) \geq t\}$ existen $x_z \in \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\}$ y $y_z \in \{y \in \mathbb{R} : g(y) \geq t\}$ tales que $z = \lambda x_z + (1 - \lambda)y_z$. Por tanto, se tiene que $h(z) \geq f(x_z)^{1-\lambda} g(y_z)^\lambda \geq t$ y, así, $z \in \{z \in \mathbb{R} : h(z) \geq t\}$.

Entonces, $\forall t \in [0, 1]$, teniendo en cuenta el contenido anterior y que los conjuntos $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\}$ y $\{y \in \mathbb{R} : g(y) \geq t\}$ son no vacíos, ya que $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$, aplicando el Lema 2.1 con $\gamma = 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(z) dz &= \int_0^1 |\{z \in \mathbb{R} : h(z) \geq t\}| dt \\ &\geq (1 - \lambda) \int_0^1 |\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\}| dt + \lambda \int_0^1 |\{y \in \mathbb{R} : g(y) \geq t\}| dt \\ &= (1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}} f(x) dx + \lambda \int_{\mathbb{R}} g(y) dy \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) dy \right)^\lambda, \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado la desigualdad aritmético-geométrica.

Ahora supongamos que $\|f\|_\infty$ y $\|g\|_\infty$ pueden tomar cualquier valor positivo (no necesariamente 1). Entonces, las funciones $\hat{f} = \frac{f}{\|f\|_\infty}$, $\hat{g} = \frac{g}{\|g\|_\infty}$ y $\hat{h} = \frac{h}{\|f\|_\infty^{1-\lambda} \|g\|_\infty^\lambda}$, son funciones integrables Borel no negativas, definidas en \mathbb{R} (por serlo f , g y h). También, notar que las funciones \hat{f} y \hat{g} tienen norma infinito igual a 1. Además, por hipótesis tenemos $f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda \leq h(z)$, si $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, de donde se sigue la siguiente desigualdad:

$$\hat{f}(x)^{1-\lambda} \hat{g}(y)^\lambda = \left(\frac{f(x)}{\|f\|_\infty} \right)^{1-\lambda} \left(\frac{g(y)}{\|g\|_\infty} \right)^\lambda = \frac{f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda}{\|f\|_\infty^{1-\lambda} \|g\|_\infty^\lambda} \leq \frac{h(z)}{\|f\|_\infty^{1-\lambda} \|g\|_\infty^\lambda} = \hat{h}(z).$$

Por tanto si $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$, \hat{f} , \hat{g} y \hat{h} cumplen la desigualdad (2.2), de donde se sigue:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(z) dz &\geq \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y) dy \right)^\lambda \\ \iff \int_{\mathbb{R}} \frac{h(z)}{\|f\|_\infty^{1-\lambda} \|g\|_\infty^\lambda} dz &\geq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\|f\|_\infty} dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{g(y)}{\|g\|_\infty} dy \right)^\lambda. \end{aligned}$$

Finalmente, sacando las constantes fuera y simplificando, se llega a:

$$\int_{\mathbb{R}} h(z) dz \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) dy \right)^\lambda$$

y queda probado el enunciado para el caso general si $n = 1$.

Para el caso $n > 1$ aplicamos inducción. Para cada $x_1 \in \mathbb{R}$ y cada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ definimos $f_{x_1} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow [0, +\infty)$ dada por $f_{x_1}(x_2, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$. Tomamos $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ cumpliendo las hipótesis del teorema. Por lo que se tiene:

$$h_{z_1}((1 - \lambda)(x_2, \dots, x_n) + \lambda(y_2, \dots, y_n)) \geq f_{x_1}(x_2, \dots, x_n)^{1-\lambda} g_{y_1}(y_2, \dots, y_n)^\lambda$$

siempre que $(x_2, \dots, x_n), (y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $z_1 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda y_1$.

Por hipótesis de inducción:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{z_1}(\bar{z}) d\bar{z} \geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{x_1}(\bar{x}) d\bar{x} \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{y_1}(\bar{y}) d\bar{y} \right)^\lambda,$$

donde $\bar{z} = (z_2, \dots, z_n)$, $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)$ y $\bar{y} = (y_2, \dots, y_n)$.

Aplicando la desigualdad para $n = 1$ a las funciones $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, $\bar{g} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ y $\bar{h} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, dadas por

$$\bar{f}(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{x_1}(\bar{x}) d\bar{x},$$

$$\bar{g}(y_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{y_1}(\bar{y}) d\bar{y}$$

y

$$\bar{h}(z_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{z_1}(\bar{z}) d\bar{z},$$

y el teorema de Fubini obtenemos el resultado, ya que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h(z) dz &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h(z_1, \bar{z}) d\bar{z} dz_1 \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \bar{x}) d\bar{x} dx_1 \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(y_1, \bar{y}) d\bar{y} dy_1 \right)^\lambda \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right)^\lambda \end{aligned}$$

llegando así a la desigualdad (2.1). □

Ahora podemos enunciar y demostrar el resultado fundamental de este capítulo, que es la desigualdad de Brunn-Minkowski.

Teorema 2.3. (Desigualdad de Brunn-Minkowski) *Para cualesquiera A, B dos conjuntos medibles Borel no vacíos en \mathbb{R}^n y para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ se tiene que*

$$|A|^{1-\lambda} |B|^\lambda \leq |(1 - \lambda)A + \lambda B|. \tag{2.3}$$

Equivalentemente, para cualesquiera A y B , dos conjuntos medibles Borel no vacíos en \mathbb{R}^n ,

$$|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \leq |(A + B)|^{\frac{1}{n}}. \tag{2.4}$$

Demostración. Si A o B tienen medida infinita el resultado es trivial. Si no, para probar (2.3) basta tomar $f = \chi_A$, $g = \chi_B$ y $h = \chi_{(1-\lambda)A + \lambda B}$ y aplicar el Teorema 2.2, ya que son funciones que cumplen las hipótesis de dicho resultado.

Veamos que (2.4) es equivalente a (2.3). Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ dos conjuntos medibles, entonces, aplicando la desigualdad (2.3) a los conjuntos $\bar{A} = \frac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}}$ y $\bar{B} = \frac{B}{|B|^{\frac{1}{n}}}$ con $\lambda = \frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}}$, obtenemos (2.4).

Recíprocamente, dado $\lambda \in [0, 1]$ y aplicando la desigualdad aritmético-geométrica a (2.4) llegamos a (2.3):

$$|(1 - \lambda)A + \lambda B|^{\frac{1}{n}} \geq (1 - \lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda|B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1-\lambda}{n}} |B|^{\frac{\lambda}{n}}.$$

□

Como consecuencia de la desigualdad de Brunn-Minkowski tenemos el siguiente corolario, que nos proporciona la concavidad de algunas funciones, la cual será necesaria en algunos resultados posteriores.

Corolario 2.4. Sea $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$, con K un cuerpo convexo y f cóncava. Entonces, la función $V_f : [0, \|f\|_\infty] \rightarrow [0, +\infty)$, dada por $V_f(t) = |\{x \in K : f(x) \geq t\}|$, cumple que $V_f^{\frac{1}{n}}$ es cóncava.

Demostración. Sean $t_1, t_2 \in [0, \|f\|_\infty]$ y $\lambda \in [0, 1]$. Veamos que

$$\begin{aligned} V_f((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)^{\frac{1}{n}} &\geq (1-\lambda)V_f(t_1)^{\frac{1}{n}} + \lambda V_f(t_2)^{\frac{1}{n}} \\ \iff |\{x \in K : f(x) \geq (1-\lambda)t_1 + \lambda t_2\}|^{\frac{1}{n}} &\geq (1-\lambda)|\{x \in K : f(x) \geq t_1\}|^{\frac{1}{n}} + \lambda|\{x \in K : f(x) \geq t_2\}|^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Para ello, probemos primero el siguiente contenido:

$$(1-\lambda)\{x \in K : f(x) \geq t_1\} + \lambda\{x \in K : f(x) \geq t_2\} \subseteq \{x \in K : f(x) \geq (1-\lambda)t_1 + \lambda t_2\}.$$

Sean $x_1 \in \{x \in K : f(x) \geq t_1\}$ y $x_2 \in \{x \in K : f(x) \geq t_2\}$, por la concavidad de f se tiene:

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \geq (1-\lambda)t_1 + \lambda t_2,$$

con lo que queda probado el contenido. Finalmente, tomando la raíz n -ésima del volumen de los conjuntos anteriores y aplicando la desigualdad de Brunn-Minkowski se obtiene el resultado:

$$\begin{aligned} |\{x \in K : f(x) \geq (1-\lambda)t_1 + \lambda t_2\}|^{\frac{1}{n}} &\geq |(1-\lambda)\{x \in K : f(x) \geq t_1\} + \lambda\{x \in K : f(x) \geq t_2\}|^{\frac{1}{n}} \\ &\geq |(1-\lambda)\{x \in K : f(x) \geq t_1\}|^{\frac{1}{n}} + |\lambda\{x \in K : f(x) \geq t_2\}|^{\frac{1}{n}} \\ &= (1-\lambda)|\{x \in K : f(x) \geq t_1\}|^{\frac{1}{n}} + \lambda|\{x \in K : f(x) \geq t_2\}|^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

□

Otra consecuencia de la desigualdad de Brunn-Minkowski es la concavidad de la raíz n -ésima de la función covariograma. Este resultado se utilizará en el Capítulo 4 para dar una demostración de la desigualdad de Zhang. Veamos su demostración en el siguiente corolario:

Corolario 2.5. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $g_K : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ la función covariograma, dada por $g_K(x) = |K \cap (x + K)|$. Entonces, $g_K^{\frac{1}{n}}$ es cóncava en $K - K$.

Demostración. Sean $x, y \in K - K$ y $\lambda \in [0, 1]$. Veamos primero el contenido:

$$K \cap (((1-\lambda)x + \lambda y) + K) \supseteq (1-\lambda)(K \cap (x + K)) + \lambda(K \cap (y + K)).$$

Sean $z_1 \in K \cap (x + K)$ y $z_2 \in K \cap (y + K)$. Se tiene que $(1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \in K$ por ser K un cuerpo convexo. Por otra parte, $z_1 = x + w_1$ y $z_2 = y + w_2$, con $w_1, w_2 \in K$. Entonces, utilizando la convexidad de K :

$$(1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 = (1-\lambda)x + \lambda y + (1-\lambda)w_1 + \lambda w_2 \in (1-\lambda)x + \lambda y + K.$$

Con lo que queda probado el contenido. Finalmente, utilizando el contenido anterior y la desigualdad de Brunn-Minkowski se tiene que $g_K^{\frac{1}{n}}$ es una función cóncava:

$$\begin{aligned} g_K^{\frac{1}{n}}((1-\lambda)x + \lambda y) &\geq |(1-\lambda)(K \cap (x + K)) + \lambda(K \cap (y + K))|^{\frac{1}{n}} \\ &\geq (1-\lambda)|K \cap (x + K)|^{\frac{1}{n}} + \lambda|K \cap (y + K)|^{\frac{1}{n}} = (1-\lambda)g_K^{\frac{1}{n}}(x) + \lambda g_K^{\frac{1}{n}}(y). \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

La desigualdad de Berwald

En este capítulo vamos a demostrar la desigualdad de Berwald que fue demostrada por Berwald en 1947 para escalares $0 < \gamma_1 < \gamma_2$. Esta desigualdad será muy importante para poder demostrar algunos resultados del siguiente capítulo a partir de los cuales se deducirá una de las demostraciones de la desigualdad de Zhang que veremos en este trabajo.

Esta desigualdad proporciona una desigualdad inversa a la de Hölder, para funciones cóncavas, mediante unos pesos que dependen de las constantes γ_1 y γ_2 , de la dimensión n y del volumen de K .

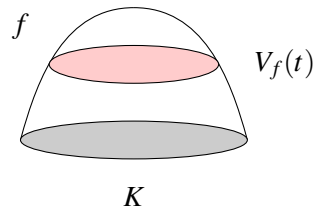
La demostración original se encuentra en [6], donde está escrita en alemán. Una traducción al inglés se puede encontrar en [1]. Veamos su demostración.

Teorema 3.1. (Desigualdad de Berwald) *Sea $0 < \gamma_1 < \gamma_2$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $f : K \rightarrow [0, +\infty)$ una función cóncava, continua y no idénticamente nula. Entonces:*

$$\left(\frac{\binom{\gamma_2+n}{n}}{|K|} \int_K f(x)^{\gamma_2} dx \right)^{\frac{1}{\gamma_2}} \leq \left(\frac{\binom{\gamma_1+n}{n}}{|K|} \int_K f(x)^{\gamma_1} dx \right)^{\frac{1}{\gamma_1}}. \quad (3.1)$$

Demostración. Sea M el máximo valor que toma f en K .

Entonces, $\forall t \geq 0$ consideramos la función dada por $V_f(t) = |\{x \in K : f(x) \geq t\}|$, que es no negativa y no creciente, tal que $V_f(0) = |K|$ y $V_f(t) = 0, \forall t > M$.



Además, por el Corolario 2.4, sabemos que $V_f^{\frac{1}{\gamma}}$ es una función cóncava en $[0, M]$.

Dado $\gamma > 0$, consideramos el valor dado por:

$$\Phi_\gamma(f) = \left(\frac{\binom{\gamma+n}{n}}{|K|} \int_{B_f} \gamma t^{\gamma-1} dx dt \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (3.2)$$

donde

$$B_f = \{(x, t) \in K \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x)\}$$

es un conjunto convexo en \mathbb{R}^{n+1} . Veámoslo:

Dados $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in B_f$ y $\lambda \in [0, 1]$ veamos que:

$$\lambda(x_1, t_1) + (1 - \lambda)(x_2, t_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \in B_f.$$

Usando la concavidad de f :

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2,$$

por lo que, B_f es convexo.

Además, utilizando el teorema de Fubini, podemos expresar (3.2) de las siguientes formas:

$$\Phi_\gamma(f) = \left(\frac{\binom{\gamma+n}{n}}{|K|} \int_0^{\|f\|_\infty} V_f(t) \gamma t^{\gamma-1} dt \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{\binom{\gamma+n}{n}}{|K|} \int_K f(x)^\gamma dx \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

donde en la última igualdad hemos usado el Lema 2.1.

A continuación, introduciremos las funciones tejado que usaremos en esta demostración. Dado $x_0 \in K$ y $\tilde{M} > 0$, se define la función tejado sobre x_0 con altura \tilde{M} como la función cóncava $\hat{f} : K \rightarrow [0, +\infty)$ tal que $B_{\hat{f}} = \text{conv}((x_0, \tilde{M}), \{0\} \times K)$.

Entonces, tomando una función tejado con altura \hat{M} sobre un punto $x_0 \in K$, se tiene que $V_{\hat{f}}$ es independiente de x_0 ya que se tiene que

$$B_{\hat{f}} = \text{conv}((x_0, \hat{M}), \{0\} \times K) = \left\{ (1 - \lambda)(x, 0) + \lambda(x_0, \hat{M}) : x \in K \times \{0\}, \lambda \in [0, 1] \right\}$$

y así $V_{\hat{f}}$ es la sección de $B_{\hat{f}}$ a altura t , que viene dada por:

$$B_{\hat{f}} \cap (\mathbb{R}^n \times \{t\}) = \left\{ (1 - \lambda)(x, 0) + \lambda(x_0, \hat{M}) : x \in K, \lambda = \frac{t}{\hat{M}} \right\} = \left(\left(1 - \frac{t}{\hat{M}}\right)K + \frac{t}{\hat{M}}x_0 \right) \times \{t\}.$$

Con lo que se tiene que:

$$V_{\hat{f}}(t) = \left(1 - \frac{t}{\hat{M}}\right)^n |K|.$$

Además, realizando el cambio de variable $t = s\hat{M}$, se tiene:

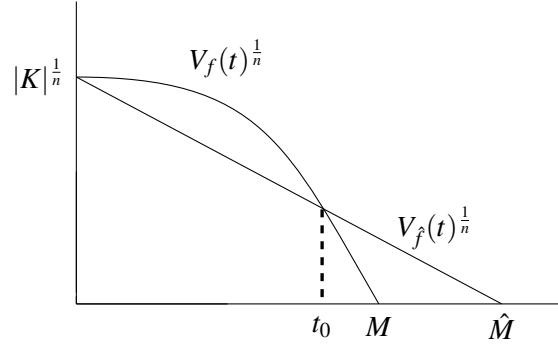
$$\begin{aligned} \Phi_\gamma(\hat{f})^\gamma &= \frac{\binom{\gamma+n}{n}}{|K|} \int_K \hat{f}(x)^\gamma dx = \frac{\binom{\gamma+n}{n}}{|K|} \int_0^{\hat{M}} \gamma t^{\gamma-1} V_{\hat{f}}(t) dt = \frac{\binom{\gamma+n}{n}}{|K|} \int_0^1 \gamma (s\hat{M})^{\gamma-1} V_{\hat{f}}(s\hat{M}) \hat{M} ds \\ &= \frac{\binom{\gamma+n}{n}}{|K|} \int_0^1 \gamma \hat{M}^\gamma s^{\gamma-1} \left(1 - \frac{s\hat{M}}{\hat{M}}\right)^n |K| ds = \binom{\gamma+n}{n} \int_0^1 \gamma \hat{M}^\gamma s^{\gamma-1} (1-s)^n ds \\ &= \gamma \hat{M}^\gamma \binom{\gamma+n}{n} \beta(\gamma, n+1) = \gamma \hat{M}^\gamma \binom{\gamma+n}{n} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\gamma+n+1)} = \hat{M}^\gamma. \end{aligned}$$

De donde se sigue que: $\Phi_\gamma(\hat{f}) = \hat{M}$, $\forall \gamma > 0$.

Sea ahora $0 < \gamma_1 < \gamma_2$ y tomamos \hat{f} la función tejado levantada sobre el punto en el que f alcanza su máximo sobre K y de altura $\hat{M} = \Phi_{\gamma_1}(f)$, de manera que $\Phi_{\gamma_1}(f) = \hat{M} = \Phi_{\gamma_1}(\hat{f})$. Luego, se tiene que $M \leq \hat{M}$, ya que si se tuviera que $M > \hat{M}$, por la convexidad de B_f , se tendría el contenido estricto $B_{\hat{f}} \subset B_f$. Por tanto, tendríamos que $\Phi_{\gamma_1}(f) < \Phi_{\gamma_1}(\hat{f}) = \hat{M} = \Phi_{\gamma_1}(f)$, llegando a una contradicción.

Además, V_f y $V_{\hat{f}}$ son funciones no crecientes en $[0, M]$ y $[0, \hat{M}]$ respectivamente, con $V_f(0) = V_{\hat{f}}(0) = |K|$, $V_f(t) = 0, \forall t > M$ y $V_{\hat{f}}(t) = 0, \forall t > \hat{M}$. Y, como $V_f^{\frac{1}{n}}$ es cóncava en $[0, M]$ y $V_{\hat{f}}^{\frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{t}{\hat{M}}\right) |K|^{\frac{1}{n}}$ es afín en $[0, \hat{M}]$, se tiene que existe un $t_0 \in [0, M]$ tal que:

$$V_f(t) - V_{\hat{f}}(t) = \begin{cases} \geq 0 & , \quad \text{si } 0 \leq t \leq t_0 \\ \leq 0 & , \quad \text{si } t_0 < t < M. \end{cases}$$



Entonces, teniendo en cuenta que $V_f(t) = 0, \forall t > M$, se sigue que, por la elección de \hat{f} :

$$\begin{aligned} \int_0^{\hat{M}} \gamma_1 t^{\gamma_1} (V_f(t) - V_{\hat{f}}(t)) dt = 0 &\iff \int_0^{t_0} \gamma_1 t^{\gamma_1} (V_f(t) - V_{\hat{f}}(t)) dt - \int_{t_0}^{\hat{M}} \gamma_1 t^{\gamma_1} (V_{\hat{f}}(t) - V_f(t)) dt = 0 \\ &\iff \int_0^{t_0} \gamma_1 t^{\gamma_1} (V_f(t) - V_{\hat{f}}(t)) dt = \int_{t_0}^{\hat{M}} \gamma_1 t^{\gamma_1} (V_{\hat{f}}(t) - V_f(t)) dt. \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene:

$$\begin{aligned} \Phi_{\gamma_2}(f)^{\gamma_2} - \Phi_{\gamma_2}(\hat{f})^{\gamma_2} &= \frac{\binom{\gamma_2+n}{n}}{|K|} \left[\int_0^M V_f(t) \gamma_2 t^{\gamma_2-1} dt - \int_0^{\hat{M}} V_{\hat{f}}(t) \gamma_2 t^{\gamma_2-1} dt \right] \\ &= \frac{\binom{\gamma_2+n}{n}}{|K|} \left[\int_0^{\hat{M}} (V_f(t) - V_{\hat{f}}(t)) \gamma_2 t^{\gamma_2-1} dt \right] \\ &= \frac{\binom{\gamma_2+n}{n}}{|K|} \left[\int_0^{t_0} (V_f(t) - V_{\hat{f}}(t)) \gamma_2 t^{\gamma_2-1} dt - \int_{t_0}^{\hat{M}} (V_{\hat{f}}(t) - V_f(t)) \gamma_2 t^{\gamma_2-1} dt \right] \\ &= \frac{\binom{\gamma_2+n}{n}}{|K|} \left[\int_0^{t_0} (V_f(t) - V_{\hat{f}}(t)) \frac{\gamma_1}{\gamma_1} \gamma_2 t^{\gamma_2-1+\gamma_1-1-\gamma_1+1} dt - \int_{t_0}^{\hat{M}} (V_{\hat{f}}(t) - V_f(t)) \frac{\gamma_1}{\gamma_1} \gamma_2 t^{\gamma_2-1+\gamma_1-1-\gamma_1+1} dt \right] \\ &= \frac{\binom{\gamma_2+n}{n}}{|K|} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left[\int_0^{t_0} (V_f(t) - V_{\hat{f}}(t)) \gamma_1 t^{\gamma_1-1} t^{\gamma_2-\gamma_1} dt - \int_{t_0}^{\hat{M}} (V_{\hat{f}}(t) - V_f(t)) \gamma_1 t^{\gamma_1-1} t^{\gamma_2-\gamma_1} dt \right] \\ &\leq \frac{\binom{\gamma_2+n}{n}}{|K|} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} t_0^{\gamma_2-\gamma_1} \left[\int_0^{t_0} (V_f(t) - V_{\hat{f}}(t)) \gamma_1 t^{\gamma_1-1} dt - \int_{t_0}^{\hat{M}} (V_{\hat{f}}(t) - V_f(t)) \gamma_1 t^{\gamma_1-1} dt \right] = 0. \end{aligned}$$

Con lo que, $\Phi_{\gamma_2}(f) \leq \Phi_{\gamma_2}(\hat{f}) = \hat{M} = \Phi_{\gamma_1}(f)$ y queda probado el enunciado. □

Capítulo 4

El cuerpo de proyección polar y la desigualdad de Zhang

En este capítulo vamos a ver otra forma en la que se puede expresar el volumen de la proyección de un cuerpo convexo sobre un hiperplano perpendicular a una dirección de \mathbb{S}^{n-1} , lo cual nos permitirá ver que $\|x\|_2 |P_{x^\perp} K|$ define una norma en \mathbb{R}^n . Además, la bola unidad dada por esa norma es el cuerpo de proyección polar, $\Pi^* K$, que será muy importante, puesto que la cantidad dada por $|K|^{n-1} |\Pi^* K|$ es invariante por transformaciones lineales y será el objeto de estudio en la segunda sección de este capítulo. Finalmente, se demostrará que la cantidad anterior está acotada inferiormente por

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n^n} \leq |K|^{n-1} |\Pi^* K|$$

llegando así a la desigualdad de Zhang. Además, si K es un simplex n -dimensional se verá que se cumple la igualdad.

En este trabajo se presentan dos demostraciones de la desigualdad de Zhang. La primera, se obtendrá como consecuencia de la desigualdad de Berwald, cuya demostración es bastante reciente y se llevó a cabo para obtener una desigualdad de Zhang discreta que se puede encontrar en [4]. En la segunda demostración se utilizarán los cuerpos de θ -convolución. La demostración original de la desigualdad de Zhang se puede encontrar en [10].

4.1. Proyecciones de cuerpos convexos y el cuerpo de proyección polar

Comezamos viendo otra expresión de $\|x\|_2 |P_{x^\perp} K|$ en términos de una integral respecto de la medida de Hausdorff en la superficie de K :

Teorema 4.1. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, se tiene la siguiente igualdad:*

$$\|x\|_2 |P_{x^\perp} K| = \frac{1}{2} \int_{\partial K} \langle x, \nu(z) \rangle d\mathcal{H}(z),$$

donde $\nu(z)$ es el vector normal exterior unitario a K en z y $d\mathcal{H}(z) = d\mathcal{H}^{n-1}(z)$.

Demostración. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $x \in \mathbb{R}^n$, con $x \neq 0$. Supongamos primero que K es un politopo.

Sean F_1, \dots, F_l sus caras $(n-1)$ -dimensionales y θ_i el vector unitario normal exterior a la cara F_i $\forall i = 1, \dots, l$. Entonces, tomando los conjuntos $F_+ = \{F_i : \langle \frac{x}{\|x\|_2}, \theta_i \rangle > 0\}$, $F_- = \{F_i : \langle \frac{x}{\|x\|_2}, \theta_i \rangle < 0\}$ y $F_0 = \{F_i : \langle \frac{x}{\|x\|_2}, \theta_i \rangle = 0\}$, tenemos que

$$P_{x^\perp} K = \bigcup_{F_i \in F_+} P_{x^\perp} F_i = \bigcup_{F_i \in F_-} P_{x^\perp} F_i.$$

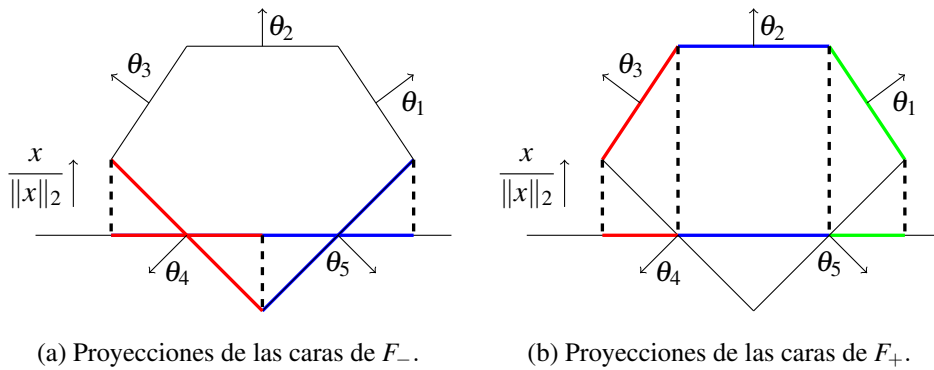


Figura 4.1: Descomposición de $P_{x^\perp}K$ en función de las caras de F_+ y F_- .

Además, esta unión es disjunta salvo conjuntos de medida nula. Por lo tanto,

$$|P_{x^\perp}K| = \sum_{F_i \in F_+} |P_{x^\perp}F_i| = \sum_{F_i \in F_-} |P_{x^\perp}F_i|.$$

Entonces, si $F_i \in F_0$ tenemos que $P_{x^\perp}F_i$ es un conjunto de medida $n-1$ dimensional nula, luego

$$2|P_{x^\perp}K| = \sum_{i=1}^l |P_{x^\perp}F_i| \iff |P_{x^\perp}K| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l |P_{x^\perp}F_i|.$$

También, notar que para cada F_i se tiene:

$$|P_{x^\perp}F_i| = \int_{P_{x^\perp}F_i} dy = \int_{F_i} \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|_2}, \theta_i \right\rangle \right| dz = \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|_2}, \theta_i \right\rangle \right| |F_i|.$$

De donde se sigue la igualdad que queríamos demostrar:

$$\begin{aligned} |P_{x^\perp}K| &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \int_{F_i} \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|_2}, \theta_i \right\rangle \right| dz = \frac{1}{2} \int_{\partial K} \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|_2}, \nu(z) \right\rangle \right| d\mathcal{H}(z) \\ \iff \|x\|_2 |P_{x^\perp}K| &= \frac{1}{2} \int_{\partial K} |\langle x, \nu(z) \rangle| d\mathcal{H}(z). \end{aligned}$$

Y así queda probado el enunciado para el caso en el que K sea un politopo. Finalmente, si K es un cuerpo convexo cualquiera, aproximando por politopos se tiene el resultado. \square

Así pues, del teorema anterior se deduce que $\|x\|_2 |P_{x^\perp}K|$ es una norma en \mathbb{R}^n :

Corolario 4.2. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Entonces, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, la expresión dada por

$$\|x\|_{\Pi^*K} = \|x\|_2 |P_{x^\perp}K| = \frac{1}{2} \int_{\partial K} |\langle x, \nu(z) \rangle| d\mathcal{H}(z)$$

define una norma en \mathbb{R}^n .

Además, la bola unidad dada por esta norma es el cuerpo de proyección polar de K , lo denotaremos por Π^*K , que es centralmente simétrico, y ΠK es el cuerpo polar de Π^*K .

Demostración. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Veamos que $\|\cdot\|_{\Pi^*K}$ satisface las propiedades que definen a una norma:

- Primero notar que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\|x\|_{\Pi^*K} = \|x\|_2 |P_{x^\perp}K| \geq 0$.

Además, $\|x\|_{\Pi^*K} = 0 \iff \|x\|_2 = 0 \iff x = 0$, ya que K es un cuerpo convexo y $rB_2^n \subseteq K$ para un cierto $r > 0$, luego $|P_{x^\perp}K| > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

- Veamos la desigualdad triangular. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\begin{aligned} \|x+y\|_{\Pi^*K} &= \|x+y\|_2 |P_{(x+y)^\perp} K| = \frac{1}{2} \int_{\partial K} |\langle x+y, \nu(z) \rangle| d\mathcal{H}(z) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\partial K} |\langle x, \nu(z) \rangle| d\mathcal{H}(z) + \frac{1}{2} \int_{\partial K} |\langle y, \nu(z) \rangle| d\mathcal{H}(z) = \|x\|_2 |P_{x^\perp} K| + \|y\|_2 |P_{y^\perp} K| \\ &= \|x\|_{\Pi^*K} + \|y\|_{\Pi^*K}. \end{aligned}$$

- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\|\lambda x\|_{\Pi^*K} = \|\lambda x\|_2 |P_{(\lambda x)^\perp} K| = |\lambda| \|x\|_2 |P_{x^\perp} K| = |\lambda| \|x\|_{\Pi^*K}.$$

Por lo tanto, $\|\cdot\|_{\Pi^*K}$ es una norma en \mathbb{R}^n .

Que Π^*K es centralmente simétrico se deduce fácilmente de las propiedades de la norma, ya que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$\|-x\|_{\Pi^*K} = |-1| \|x\|_{\Pi^*K} = \|x\|_{\Pi^*K}.$$

Además, ΠK es el cuerpo polar de Π^*K por definición, ya que $h_L(x) = \|x\|_{L^\circ}$. Y queda probado el enunciado. □

4.2. La desigualdad de Zhang

En esta sección vamos a ver dos demostraciones de la desigualdad de Zhang. En la primera subsección veremos una demostración que será consecuencia de unos resultados en los que se utilizarán la desigualdad de Berwald y en la segunda subsección se verá otra usando los cuerpos de θ -convolución.

Comenzamos demostrando que $|K|^{n-1} |\Pi^*K|$ es un invariante afín, ya que será objeto de estudio en la desigualdad de Zhang:

Proposición 4.3. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Entonces,*

$$|K|^{n-1} |\Pi^*K| \tag{4.1}$$

es invariante por transformaciones lineales.

Demostración. Consideramos primero $\Phi \in SL(n) = \{T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : T \text{ es lineal y } \det(T) = 1\}$. Entonces, teniendo en cuenta la igualdad

$$\|x\|_{\Pi^*K} = \|x\|_2 |P_{x^\perp} K| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|K + \varepsilon[-x, x]| - |K|}{2\varepsilon},$$

que se obtiene calculando el volumen de $K + \varepsilon[-x, x]$ utilizando el teorema de Fubini, se tiene que:

$$\begin{aligned} h_{\Pi\Phi(K)}(x) &= \|x\|_2 |P_{x^\perp} \Phi(K)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|\Phi(K) + \varepsilon[-x, x]| - |\Phi(K)|}{2\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|\Phi(K + \varepsilon[-\Phi^{-1}(x), \Phi^{-1}(x)])| - |\Phi(K)|}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|K + \varepsilon[-\Phi^{-1}(x), \Phi^{-1}(x)]| - |K|}{2\varepsilon} \\ &= \|\Phi^{-1}(x)\|_2 |P_{\Phi^{-1}(x)^\perp} K| = h_{\Pi K}(\Phi^{-1}(x)) = \sup_{y \in \Pi K} \langle y, \Phi^{-1}(x) \rangle = \sup_{y \in \Pi K} \langle \Phi^{-t}(y), x \rangle \\ &= h_{\Phi^{-t}(\Pi K)}(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que para cualquier $\Phi \in SL(n)$ se da la igualdad:

$$h_{\Pi\Phi(K)}(x) = h_{\Phi^{-t}(\Pi K)}(x),$$

donde Φ^{-t} denota la aplicación inversa traspuesta de Φ . Luego, $\Pi\Phi(K) = \Phi^{-t}(\Pi K)$.

Además, teniendo en cuenta que:

$$(\alpha T)^{-t} = \frac{1}{\alpha} T^{-t}, \text{ para } \alpha > 0$$

y para $\beta > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\begin{aligned} h_{\Pi(\beta K)}(x) &= \|x\|_2 |P_{x^\perp} \beta K| = \beta^{n-1} \|x\|_2 |P_{x^\perp} K| = \|\beta^{n-1} x\|_2 |P_{x^\perp} K| = h_{\Pi K}(\beta^{n-1} x) \\ &= \sup \{ \langle \beta^{n-1} x, y \rangle : y \in \Pi K \} = \sup \{ \langle x, \beta^{n-1} y \rangle : y \in \Pi K \} = \sup \{ \langle x, z \rangle : z \in \beta^{n-1} \Pi K \} \\ &= h_{\beta^{n-1} \Pi K}(x), \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\Pi(\beta K) = \beta^{n-1} \Pi K$.

Por lo tanto, para cualquier $T \in GL(n)$, teniendo en cuenta la observación anterior, se deduce que:

$$h_{\Pi(TK)}(x) = h_{\Pi\left(\frac{T}{|\det T|^{\frac{1}{n}}}\right) \Pi\left(|\det T|^{\frac{1}{n}} K\right)}(x) = h_{\left(\frac{T}{|\det T|^{\frac{1}{n}}}\right)^{-t} \Pi\left(|\det T|^{\frac{1}{n}} K\right)}(x) = h_{|\det T| |T^{-t} \Pi K|}(x).$$

Luego, se tiene $\Pi(TK) = |\det T| |T^{-t} \Pi K|$.

Por otra parte, teniendo en cuenta (1.2), (1.1) y que el polar de $\Pi(K)$ es $\Pi^*(K)$ se deduce que:

$$\Pi^*(TK) = \frac{T}{|\det T|} \Pi^* K.$$

Finalmente, tomando volúmenes y utilizando la relación $|TK| = |\det T| |K|$ se tiene que:

$$\begin{aligned} |\Pi^*(TK)| &= \frac{1}{|\det T|^{n-1}} |\Pi^* K| = \frac{|K|^{n-1}}{|TK|^{n-1}} |\Pi^* K| \\ \iff |TK|^{n-1} |\Pi^*(TK)| &= |K|^{n-1} |\Pi^* K|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|K|^{n-1} |\Pi^* K|$ es invariante por transformaciones lineales, como queríamos probar. \square

Antes de demostrar la desigualdad de Zhang, se obtuvo la desigualdad de Petty que da una cota superior de (4.1), que en el teorema anterior se ha visto que es invariante por transformaciones lineales, y que es más fuerte que la desigualdad isoperimétrica. Solo la enunciamos, ya que nuestro estudio se centra en la cota inferior:

Teorema 4.4. (Petty projection inequality (1965)) *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Entonces,*

$$|K|^{n-1} |\Pi^* K| \leq |B_2^n|^{n-1} |\Pi^* B_2^n|.$$

Es decir, el cuerpo convexo que maximiza $|K|^{n-1} |\Pi^ K|$ es la bola unidad n -dimensional dada por la norma Euclídea, B_2^n .*

4.2.1. Demostración de la desigualdad de Zhang como consecuencia de la desigualdad de Berwald

En esta subsección se presenta una demostración de la desigualdad de Zhang como consecuencia de la desigualdad de Berwald, vista en el Capítulo 3. Esta prueba, y la de los resultados auxiliares que se necesitan, se pueden encontrar en [4, Section 3]. Veamos primero un resultado que utilizaremos:

Lema 4.5. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $p > 0$. Entonces,*

$$\frac{1}{p+1} \int_{P_{e_n^\perp}(K)} (|K \cap (y + \langle e_n \rangle)|)^{p+1} dy = p \int_0^\infty r^{p-1} |K \cap (re_n + K)| dr.$$

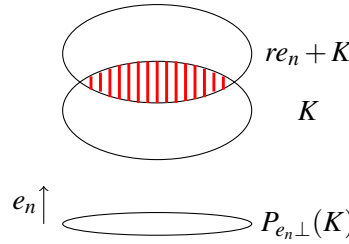


Figura 4.2: $K \cap (re_n + K) \cap (y + \langle e_n \rangle)$

Demostración. Primero notar que, por el teorema de Fubini, se tiene que para cualquier $r \geq 0$

$$\begin{aligned} |K \cap (re_n + K)| &= \int_{P_{e_n^\perp}(K)} |K \cap (re_n + K) \cap (y + \langle e_n \rangle)| dy \\ &= \int_{P_{e_n^\perp}(K)} \text{máx} \{ |K \cap (y + \langle e_n \rangle)| - r, 0 \} dy. \end{aligned}$$

Entonces, por el teorema de Fubini, para cualquier $p > 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} p \int_0^\infty r^{p-1} |K \cap (re_n + K)| dr &= p \int_0^\infty r^{p-1} \int_{P_{e_n^\perp}(K)} \text{máx} \{ |K \cap (y + \langle e_n \rangle)| - r, 0 \} dy dr \\ &= \int_{P_{e_n^\perp}(K)} \int_0^{|K \cap (y + \langle e_n \rangle)|} pr^{p-1} (|K \cap (y + \langle e_n \rangle)| - r) dr dy \\ &= \int_{P_{e_n^\perp}(K)} \left(|K \cap (y + \langle e_n \rangle)|^{p+1} - \frac{p}{p+1} |K \cap (y + \langle e_n \rangle)|^{p+1} \right) dy \\ &= \frac{1}{p+1} \int_{P_{e_n^\perp}(K)} |K \cap (y + \langle e_n \rangle)|^{p+1}. \end{aligned}$$

Llegando a la igualdad que queríamos demostrar. □

Entonces, utilizando el lema que acabamos de probar y la desigualdad de Berwald se sigue el siguiente resultado que demostramos a continuación:

Teorema 4.6. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Entonces,*

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n^n} n \int_0^\infty r^{n-1} |K \cap (re_n + K)| dr \leq \frac{|K|^{n+1}}{|P_{e_n^\perp}(K)|^n}.$$

Demostración. Sea $f : P_{e_n^\perp}(K) \rightarrow [0, \infty)$ la función dada por $f(y) = |K \cap (y + \langle e_n \rangle)|$, que es cóncava. Para ver que es cóncava, probemos primero el contenido:

$$\lambda \{K \cap (x + \langle e_n \rangle)\} + (1 - \lambda) \{K \cap (y + \langle e_n \rangle)\} \subseteq \{K \cap (\lambda x + (1 - \lambda)y + \langle e_n \rangle)\}, \tag{4.2}$$

para cualesquiera $x, y \in P_{e_n^\perp}(K)$ y $\lambda \in [0, 1]$.

Sea $a \in \lambda \{K \cap (x + \langle e_n \rangle)\} + (1 - \lambda) \{K \cap (y + \langle e_n \rangle)\}$. Entonces, existen $a_x \in \{K \cap (x + \langle e_n \rangle)\}$ y $a_y \in \{K \cap (y + \langle e_n \rangle)\}$ tales que $a = \lambda a_x + (1 - \lambda)a_y \in K$, ya que $a_x, a_y \in K$ y K es convexo. Además, existen $h_1, h_2 \in \langle e_n \rangle$ tales que $a_x = x + h_1$ y $a_y = y + h_2$. Y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} a &= \lambda a_x + (1 - \lambda)a_y = \lambda(x + h_1) + (1 - \lambda)(y + h_2) \\ &= (\lambda x + (1 - \lambda)y) + (\lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2) \in \{K \cap (\lambda x + (1 - \lambda)y + \langle e_n \rangle)\}, \end{aligned}$$

y así el contenido (4.2) es cierto. Entonces, usando la desigualdad (2.4) y el contenido que acabamos de probar, veamos que f es una función cóncava.

Sean $x, y \in P_{e_n \perp}(K)$ y $\lambda \in [0, 1]$, entonces:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= |K \cap (\lambda x + (1-\lambda)y + \langle e_n \rangle)| \geq |\lambda \{K \cap (x + \langle e_n \rangle)\} + (1-\lambda) \{K \cap (y + \langle e_n \rangle)\}| \\ &\geq \lambda |K \cap (x + \langle e_n \rangle)| + (1-\lambda) |(y + \langle e_n \rangle) \cap K| = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es una función cóncava.

Entonces, aplicando el Teorema 3.1 sobre $P_{e_n \perp}(K)$ y tomando $f(y) = |K \cap (y + \langle e_n \rangle)| \forall y \in P_{e_n \perp}(K)$ (que es un función cóncava), $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_2 = n + 1$, se tiene que:

$$\left(\frac{\binom{2n}{n-1}}{|P_{e_n \perp}(K)|} \int_{P_{e_n \perp}(K)} f^{n+1}(y) dy \right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{n}{|P_{e_n \perp}(K)|} \int_{P_{e_n \perp}(K)} f(y) dy = \frac{n}{|P_{e_n \perp}(K)|} |K|. \quad (4.3)$$

Además, teniendo en cuenta la siguiente igualdad,

$$\frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n} \frac{2n!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \frac{2n!}{n!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

se tiene:

$$\frac{\binom{2n}{n-1}}{|P_{e_n \perp}(K)|} \int_{P_{e_n \perp}(K)} f^{n+1}(y) dy = \frac{\frac{n}{n+1} \binom{2n}{n}}{|P_{e_n \perp}(K)|} \int_{P_{e_n \perp}(K)} f^{n+1}(y) dy.$$

Volviendo a (4.3) y tomando la potencia $(n+1)$ -ésima:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{n}{n+1} \binom{2n}{n}}{|P_{e_n \perp}(K)|} \int_{P_{e_n \perp}(K)} f^{n+1}(y) dy &\leq \frac{n^{n+1}}{|P_{e_n \perp}(K)|^{n+1}} |K|^{n+1} \\ \iff \frac{1}{n+1} \frac{\binom{2n}{n}}{n^n} \int_{P_{e_n \perp}(K)} f^{n+1}(y) dy &\leq \frac{|K|^{n+1}}{|P_{e_n \perp}(K)|^n}. \end{aligned}$$

Además, por el Lema 4.5 sabemos que:

$$\frac{1}{n+1} \int_{P_{e_n \perp}(K)} f(y)^{n+1} dy = n \int_0^\infty r^{n-1} |K \cap (re_n + K)| dr.$$

Finalmente, se llega a la desigualdad que queríamos demostrar:

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n^n} n \int_0^\infty r^{n-1} |K \cap (re_n + K)| dr \leq \frac{|K|^{n+1}}{|P_{e_n \perp}(K)|^n}.$$

□

Como consecuencia, podemos demostrar la desigualdad de Zhang.

Corolario 4.7. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Entonces,*

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n^n} \leq |K|^{n-1} |\Pi^* K|.$$

Demostración. Sea $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ y sea $U \in O(n)$ tal que $U^t e_n = \theta$. Por el Teorema 4.6 aplicado a UK , se tiene:

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n^n} n \int_0^\infty r^{n-1} |UK \cap (re_n + UK)| dr \leq \frac{|UK|^{n+1}}{|P_{e_n \perp}^+(UK)|^n}.$$

Equivalentemente, como $U^t e_n = \theta$ y $\rho_{\Pi^*(K)}(\theta) = \frac{1}{\|\theta\|_{\Pi^*K}} = \frac{1}{|P_{\theta \perp} K|}$:

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n^n} n \int_0^\infty r^{n-1} |K \cap (r\theta + K)| dr \leq \frac{|K|^{n+1}}{|P_{\theta \perp}(K)|^n} = |K|^{n+1} \rho_{\Pi^*(K)}^n(\theta). \quad (4.4)$$

Además, aplicando el teorema de Fubini se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} |K \cap (x+K)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K \cap (x+K)}(y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) \chi_{x+K}(y) dy dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{x+K}(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{y-K}(x) dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) |K| dy = |K|^2.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Finalmente, integrando sobre \mathbb{S}^{n-1} la expresión (4.4) y teniendo en cuenta (1.3) y (4.5), se llega a la desigualdad que queríamos probar:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\binom{2n}{n}}{n^n} \int_0^\infty nr^{n-1} |K \cap (r\theta + K)| dr d\sigma(\theta) &\leq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |K|^{n+1} \rho_{\Pi^*(K)}^n(\theta) d\sigma(\theta) \\
 \iff \frac{\binom{2n}{n}}{n^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty |B_2^n| nr^{n-1} |K \cap (r\theta + K)| dr d\sigma(\theta) &\leq |K|^{n+1} |\Pi^*(K)| \\
 &\iff \frac{\binom{2n}{n}}{n^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K \cap (x+K)| dx \leq |K|^{n+1} |\Pi^*(K)| \\
 &\iff \frac{\binom{2n}{n}}{n^n} \leq |K|^{n-1} |\Pi^*(K)|.
 \end{aligned}$$

□

4.2.2. Otra demostración de la desigualdad de Zhang

En esta última sección vamos a ver otra demostración de la desigualdad de Zhang apoyándonos en la función covariograma y en los cuerpos de θ -convolución. Todos los resultados que se muestran a continuación se pueden encontrar en [3] de una forma más general. Comenzamos dando un resultado de contenidos entre cuerpos de θ -convolución dependiendo del parámetro θ :

Lema 4.8. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Entonces, si $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < 1$:*

$$K +_{\theta_2} (-K) \subseteq K +_{\theta_1} (-K).$$

Además, se tiene el contenido inverso con el peso dado por $\frac{1}{1-\theta^{\frac{1}{n}}}$, es decir,

$$\frac{K +_{\theta_1} (-K)}{1 - \theta_1^{\frac{1}{n}}} \subseteq \frac{K +_{\theta_2} (-K)}{1 - \theta_2^{\frac{1}{n}}}.$$

Demostración. El primer contenido está claro debido a que $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < 1$. Veamos el segundo contenido del enunciado. Supongamos $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces,

$$\begin{aligned}
 &\lambda \left\{ x \in K - K : g_K^{\frac{1}{n}}(x) \geq \theta_1^{\frac{1}{n}} g_K^{\frac{1}{n}}(0) \right\} \\
 \subseteq &\lambda \left\{ x \in K - K : g_K^{\frac{1}{n}}(x) \geq \theta_1^{\frac{1}{n}} g_K^{\frac{1}{n}}(0) \right\} + (1-\lambda) \left\{ x \in K - K : g_K^{\frac{1}{n}}(x) \geq g_K^{\frac{1}{n}}(0) \right\} \\
 \subseteq &\left\{ x \in K - K : g_K^{\frac{1}{n}}(x) \geq (\lambda \theta_1^{\frac{1}{n}} + (1-\lambda)) g_K^{\frac{1}{n}}(0) \right\},
 \end{aligned}$$

donde en el primer contenido hemos usado que $0 \in \left\{ x \in K - K : g_K^{\frac{1}{n}}(x) \geq g_K^{\frac{1}{n}}(0) \right\}$ y en el segundo contenido hemos usado que la función $g_K^{\frac{1}{n}}$ es una función cóncava, ya que si

$$z_1 \in \left\{ x \in K - K : g_K^{\frac{1}{n}}(x) \geq \theta_1^{\frac{1}{n}} g_K^{\frac{1}{n}}(0) \right\} \quad \text{y} \quad z_2 \in \left\{ x \in K - K : g_K^{\frac{1}{n}}(x) \geq g_K^{\frac{1}{n}}(0) \right\},$$

entonces

$$g_K^{\frac{1}{n}}(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) \geq \lambda g_K^{\frac{1}{n}}(z_1) + (1-\lambda)g_K^{\frac{1}{n}}(z_2) \geq (\lambda\theta_1^{\frac{1}{n}} + (1-\lambda))g_K^{\frac{1}{n}}(0).$$

Finalmente, tomando $\lambda = \frac{1-\theta_2^{\frac{1}{n}}}{1-\theta_1^{\frac{1}{n}}} \in (0, 1)$, se llega al resultado:

$$\frac{1-\theta_2^{\frac{1}{n}}}{1-\theta_1^{\frac{1}{n}}}(K+\theta_1(-K)) \subseteq K+\theta_2(-K) \iff \frac{K+\theta_1(-K)}{1-\theta_1^{\frac{1}{n}}} \subseteq \frac{K+\theta_2(-K)}{1-\theta_2^{\frac{1}{n}}}.$$

□

En los siguientes resultados vamos a ver una relación de contenido entre los cuerpos de θ -convolución y el cuerpo de proyección polar de K .

Proposición 4.9. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Entonces, $\forall \theta \in (0, 1)$*

$$K+\theta(-K) \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \left| \frac{d^+}{dt} \left| K \cap \left(t \frac{x}{\|x\|_2} + K \right) \right| \right|_{t=0} \leq n(1-\theta^{\frac{1}{n}})|K| \right\}.$$

Demostración. Como $g_K^{\frac{1}{n}}$ es cóncava en $K-K$, dado $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda > 0$ suficientemente pequeño:

$$\begin{aligned} |K \cap (\lambda x + K)| &= |K \cap ((1-\lambda)0 + \lambda x + K)| \geq \left((1-\lambda)|K|^{\frac{1}{n}} + \lambda |K \cap (x+K)|^{\frac{1}{n}} \right)^n \\ &= |K| \left(1 + \lambda \left(\frac{|K \cap (x+K)|^{\frac{1}{n}}}{|K|^{\frac{1}{n}}} - 1 \right) \right)^n \\ &\geq |K| \left(1 + \lambda n \left(\frac{|K \cap (x+K)|^{\frac{1}{n}}}{|K|^{\frac{1}{n}}} - 1 \right) \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

en la primera desigualdad se ha aplicado la desigualdad de Brunn-Minkowski y en la última desigualdad se ha utilizado la desigualdad de Bernoulli, que dice: $(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall x \in (-1, +\infty)$. Por otro lado, se tiene:

$$|K \cap (\lambda x + K)| = |K| + \int_0^{\lambda \|x\|_2} \frac{d^+}{dt} \left| K \cap \left(t \frac{x}{\|x\|_2} + K \right) \right| dt \leq |K| + \lambda \|x\|_2 \max_{t \in [0, \lambda \|x\|_2]} \frac{d^+}{dt} \left| K \cap \left(t \frac{x}{\|x\|_2} + K \right) \right|. \quad (4.7)$$

Por lo que de (4.6) y (4.7) se sigue que:

$$n|K| \left(\frac{|K \cap (x+K)|^{\frac{1}{n}}}{|K|^{\frac{1}{n}}} - 1 \right) \leq \|x\|_2 \max_{t \in [0, \lambda \|x\|_2]} \frac{d^+}{dt} \left| K \cap \left(t \frac{x}{\|x\|_2} + K \right) \right|.$$

Tomando límite cuando $\lambda \rightarrow 0^+$ y teniendo en cuenta que la derivada es negativa:

$$n|K| \left(\frac{|K \cap (x+K)|^{\frac{1}{n}}}{|K|^{\frac{1}{n}}} - 1 \right) \leq \|x\|_2 \frac{d^+}{dt} \left| K \cap \left(t \frac{x}{\|x\|_2} + K \right) \right|_{t=0} = -\|x\|_2 \left| \frac{d^+}{dt} \left| K \cap \left(t \frac{x}{\|x\|_2} + K \right) \right|_{t=0} \right|.$$

Entonces, si $x \in K + \theta(-K)$,

$$\begin{aligned} n|K|(\theta^{\frac{1}{n}} - 1) &\leq -\|x\|_2 \left| \frac{d^+}{dt} \left| K \cap \left(t \frac{x}{\|x\|_2} + K \right) \right|_{t=0} \right| \\ \iff \|x\|_2 \left| \frac{d^+}{dt} \left| K \cap \left(t \frac{x}{\|x\|_2} + K \right) \right|_{t=0} \right| &\leq n|K|(1-\theta^{\frac{1}{n}}). \end{aligned}$$

□

Lema 4.10. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y sea $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Entonces:

$$\frac{d^+}{dt} |K \cap (tu + K)| \Big|_{t=0} = -|P_{u^\perp} K| = -\|u\|_{\Pi^* K}.$$

Demostración. Para todo $t > 0$ se tiene que:

$$t|P_{u^\perp} K| \geq |K| - |K \cap (tu + K)| \geq t|P_{u^\perp} K \cap (tu + K)|. \tag{4.8}$$

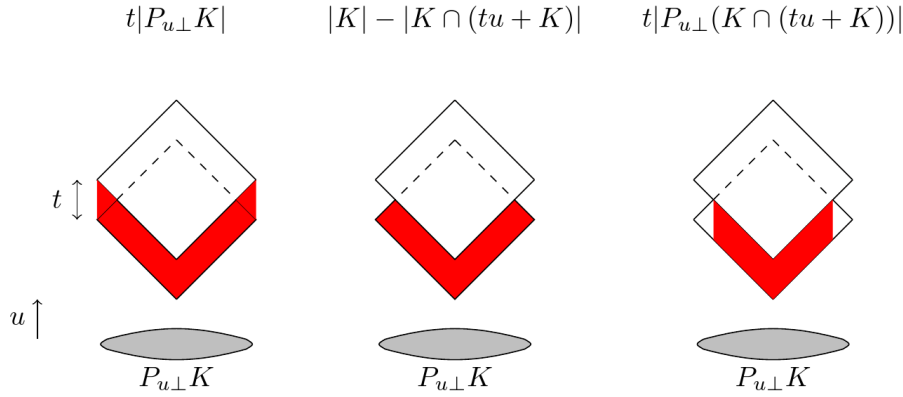


Figura 4.3: Representación de los volúmenes de la desigualdad (4.8).

Por lo tanto,

$$-\frac{d^+}{dt} |K \cap (x + K)| \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|K| - |K \cap (tu + K)|}{t} = |P_{u^\perp} K|,$$

de donde se sigue el resultado. □

Como consecuencia de los resultados anteriores se tiene otra demostración de la desigualdad de Zhang que se muestra a continuación:

Corolario 4.11. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Entonces:

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n^n} \leq |K|^{n-1} |\Pi^* K|.$$

Demostración. Del Lema 4.10 se sigue que:

$$K +_\theta (-K) \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{\Pi^* K} \leq n \left(1 - \theta^{\frac{1}{n}}\right) |K| \right\} = n \left(1 - \theta^{\frac{1}{n}}\right) |K| \Pi^* K.$$

Por otra parte, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |K +_\theta (-K)| d\theta &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\left\{ \frac{|K \cap (x+K)|}{|K|} \geq \theta \right\}}(x) dx d\theta = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \chi_{\left\{ \frac{|K \cap (x+K)|}{|K|} \geq \theta \right\}}(\theta) d\theta dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|K \cap (x+K)|}{|K|} dx = |K|, \end{aligned} \tag{4.9}$$

y realizando el cambio de variable $s^n = \theta$ se tiene:

$$\int_0^1 \left(1 - \theta^{\frac{1}{n}}\right)^n d\theta = \int_0^1 (1-s)^n n s^{n-1} ds = n\beta(n+1, n) = \binom{2n}{n}^{-1}. \tag{4.10}$$

Entonces, tomando volúmenes e integrando en θ , teniendo en cuenta (4.9) y (4.10), se llega al resultado:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |K + \theta(-K)| d\theta &\leq \int_0^1 n^n \left(1 - \theta^{\frac{1}{n}}\right)^n |K|^n |\Pi^* K| d\theta \\ \iff |K| &\leq n^n |K|^n |\Pi^* K| \binom{2n}{n}^{-1} \\ \iff \frac{\binom{2n}{n}}{n^n} &\leq |K|^{n-1} |\Pi^* K|. \end{aligned}$$

□

4.2.3. Igualdad en la desigualdad de Zhang

En esta subsección vamos a ver que si K es un simplex n -dimensional, entonces se da la igualdad en la desigualdad de Zhang. Para probarlo, se utilizarán los cuerpos de θ -convolución. Comenzamos con el siguiente lema:

Lema 4.12. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Entonces, dado $t_0 \geq 0$

$$\frac{d^+}{dt} |K \cap (tu + K)| \Big|_{t=t_0} = -|P_{u^\perp}(t_0u + K)|$$

Demostración. Para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que:

$$\varepsilon |P_{u^\perp}(t_0u + K)| \geq |K \cap (t_0u + K)| - |K \cap ((t_0 + \varepsilon)u + K)| \geq \varepsilon |P_{u^\perp}(K \cap ((t_0 + \varepsilon)u + K))|. \quad (4.11)$$

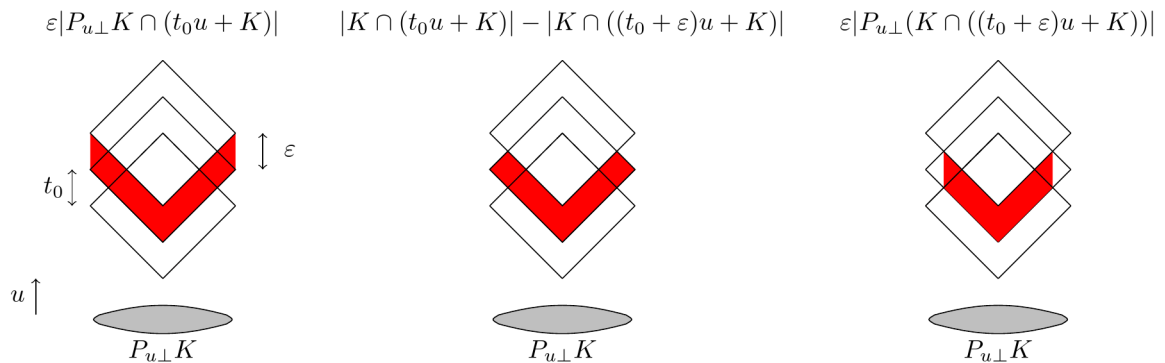


Figura 4.4: Representación de los volúmenes de (4.11).

Entonces,

$$|P_{u^\perp}(t_0u + K)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|K \cap (t_0u + K)| - |K \cap ((t_0 + \varepsilon)u + K)|}{\varepsilon} = -\frac{d^+}{dt} |K \cap (tu + K)| \Big|_{t=t_0}.$$

□

Proposición 4.13. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Entonces,

$$\overline{\bigcup_{\theta \in (0,1)} \frac{K + \theta(-K)}{1 - \theta^{\frac{1}{n}}}} = n|K| |\Pi^* K|$$

Demostración. Teniendo en cuenta el Lema anterior, $\forall x \in K - K$:

$$\begin{aligned} |K \cap (x + K)| &= |K| + \int_0^{\|x\|_2} \frac{d^+}{dt} |K \cap (t \frac{x}{\|x\|_2} + K)| dt = |K| - \int_0^{\|x\|_2} |P_{x^\perp}(K \cap (t \frac{x}{\|x\|_2} + K))| dt \\ &\geq |K| - \int_0^{\|x\|_2} |P_{x^\perp} K| dt = |K| - \|x\|_2 |P_{x^\perp} K| = |K| - \|x\|_{\Pi^* K}. \end{aligned}$$

Luego, si $x \in (1 - \theta)|K|_{\Pi^* K}$ se tiene que $\|x\|_{\Pi^* K} \leq (1 - \theta)|K|$, luego:

$$|K \cap (x + K)| \geq |K| - (1 - \theta)|K| = \theta|K|.$$

Por lo tanto, $x \in K +_\theta(-K)$, de donde se sigue que

$$(1 - \theta)|K|_{\Pi^* K} \subseteq K +_\theta(-K) \quad \text{y} \quad \frac{1 - \theta}{1 - \theta^{\frac{1}{n}}}|K|_{\Pi^* K} \subseteq \frac{K +_\theta(-K)}{1 - \theta^{\frac{1}{n}}}.$$

Luego,

$$\frac{1 - \theta}{1 - \theta^{\frac{1}{n}}}|K|_{\Pi^* K} \subseteq \frac{K +_\theta(-K)}{1 - \theta^{\frac{1}{n}}} \subseteq n|K|_{\Pi^* K}, \quad \forall \theta \in (0, 1).$$

Tomando límites cuando $\theta \rightarrow 1^-$:

$$\lim_{\theta \rightarrow 1^-} \frac{1 - \theta}{1 - \theta^{\frac{1}{n}}} = n.$$

Por lo tanto,

$$\overline{\bigcup_{\theta \in (0,1)} \frac{K +_\theta(-K)}{1 - \theta^{\frac{1}{n}}}} = n|K|_{\Pi^* K}.$$

□

Teorema 4.14. Sea K un simplex n -dimensional. Entonces, $\forall 0 \leq \theta \leq 1$

$$K +_\theta(-K) = (1 - \theta^{\frac{1}{n}})(K - K).$$

Demostración. El contenido

$$(1 - \theta^{\frac{1}{n}})(K - K) \subseteq K +_\theta(-K)$$

se tiene de forma general, ya que dado $x \in (1 - \theta^{\frac{1}{n}})(K - K)$, $\exists y \in K - K$ tal que $x = (1 - \theta^{\frac{1}{n}})y$, utilizando la concavidad de la función covariograma en su soporte:

$$g_K^{\frac{1}{n}}(x) = g_K^{\frac{1}{n}}((1 - \theta^{\frac{1}{n}})y) = g_K^{\frac{1}{n}}((1 - \theta^{\frac{1}{n}})y + \theta^{\frac{1}{n}}0) \geq (1 - \theta^{\frac{1}{n}})g_K^{\frac{1}{n}}(y) + \theta^{\frac{1}{n}}g_K^{\frac{1}{n}}(0) \geq \theta^{\frac{1}{n}}g_K^{\frac{1}{n}}(0),$$

de donde se sigue que $x \in K +_\theta(-K)$.

Veamos el otro contenido. Si tomamos $K = \{t \in \mathbb{R}^n : t_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n t_i \leq 1\}$, entonces

$$\begin{aligned} K \cap (x + K) &= \left\{ t \in \mathbb{R}^n : t_i \geq 0, t_i - x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n t_i \leq 1, \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ t \in \mathbb{R}^n : t_i \geq \max\{x_i, 0\} = x_i^+, \forall i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n t_i \leq \min\left\{1, 1 + \sum_{i=1}^n x_i\right\} \right\} \\ &= z(x) + \lambda(x)K, \end{aligned}$$

donde

$$z(x)_i = x_i^+ \quad \text{y} \quad \lambda(x)_i = \min\left\{1, 1 + \sum_{i=1}^n x_i\right\} - \sum_{i=1}^n x_i^+, \quad \text{si } \lambda(x) \geq 0.$$

Entonces, teniendo en cuenta que:

$$x_i^+ = \frac{|x_i| + x_i}{2}$$

$$\min \left\{ 1, 1 + \sum_{i=1}^n x_i \right\} = \frac{1}{2} \left(1 + 1 + \sum_{i=1}^n x_i - \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \sum_{i=1}^n x_i - \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \right).$$

Se tiene que si $\lambda(x) \geq 0$

$$\lambda(x) = \frac{1}{2} \left(2 + \sum_{i=1}^n x_i - \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x_i| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{2} \left(2 - \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| - \sum_{i=1}^n |x_i| \right).$$

$$\begin{aligned} K +_\theta(-K) &= \{x \in \mathbb{R}^n : |K \cap (x+K)| \geq \theta|K| \text{ si } x \in K-K\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda^n(x) \geq \theta \text{ si } \lambda(x) \geq 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \left(2 - \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| - \sum_{i=1}^n |x_i| \right) \geq \theta^{\frac{1}{n}}, \lambda(x) \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| + \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 2 - 2\theta^{\frac{1}{n}} = 2(1 - \theta^{\frac{1}{n}}), \lambda(x) \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

$$K - K = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda(x) \geq 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| + \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 2 \right\}.$$

Si $x \in K +_\theta(-K)$ con $0 \leq \theta \leq 1$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| + \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 2(1 - \theta^{\frac{1}{n}}).$$

Entonces, tomando $y = \frac{x}{1 - \theta^{\frac{1}{n}}}$, se tiene que:

$$\left| \sum_{i=1}^n y_i \right| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 - \theta^{\frac{1}{n}}} \right| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{1 - \theta^{\frac{1}{n}}} \right| = \frac{1}{1 - \theta^{\frac{1}{n}}} \left(\frac{x_i}{1 - \theta^{\frac{1}{n}}} \right) \leq \frac{2(1 - \theta^{\frac{1}{n}})}{1 - \theta^{\frac{1}{n}}} = 2.$$

Por lo tanto, $y \in K - K$ de donde se sigue que $x \in (1 - \theta^{\frac{1}{n}})(K - K)$. Con lo que queda probado el contenido $K +_\theta(-K) \subseteq (1 - \theta^{\frac{1}{n}})(K - K)$. \square

Como consecuencia, se tiene que si K es el simplex n -dimensional, se tiene igualdad en la desigualdad de Zhang.

Corolario 4.15. *Sea K un simplex n -dimensional. Entonces:*

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n^n} = |K|^{n-1} |\Pi^* K|.$$

Demostración. Como K es un simplex n -dimensional, teniendo en cuenta el Lema 4.13 y la Proposición 4.14, se tiene que

$$K - K = \frac{K +_\theta(-K)}{1 - \theta^{\frac{1}{n}}} = n|K| |\Pi^* K|, \quad \forall \theta \in (0, 1),$$

de donde se sigue que

$$K +_\theta(-K) = (1 - \theta^{\frac{1}{n}})n|K| |\Pi^* K|, \quad \forall \theta \in (0, 1).$$

Finalmente, tomando volúmenes, integrando en θ y teniendo en cuenta (4.9), se llega al resultado:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |K +_\theta(-K)| d\theta &= n^n |K|^n |\Pi^* K| \int_0^1 (1 - \theta^{\frac{1}{n}})^n d\theta \\ \iff |K| &= n^n |K| |\Pi^* K| \binom{2n}{n}^{-1}. \end{aligned}$$

\square

Bibliografía

- [1] ALONSO-GUTIÉRREZ, D.; ARTSTEIN-AVIDAN, S.; GONZÁLEZ MERINO, B.; JIMÉNEZ, C. H.; VILLA, R.; *Rogers-Shephard and local Loomis-Whitney type inequalities*. *Mathematische Annalen*. Springer (2019). ISSN 0025-5831, 50-52.
- [2] ALONSO-GUTIÉRREZ, D.; BASTERO, J.; *Approaching the Kannan-Lovász-Simonovits and Variance Conjectures*. *Lecture Notes in mathematics* 2131. Springer (2015). ISBN 978-3-319-13262-4.
- [3] ALONSO-GUTIÉRREZ, D.; JIMÉNEZ, C. H.; VILLA, R.; *Brunn-Minkowski and Zhang inequalities for convolution bodies*. *Avances in Mathematics* 238 (2013), 50-69.
- [4] ALONSO-GUTIÉRREZ, D.; LUCAS, E.; MARTÍN GOÑI, J.; *A discrete approach to Zhang's inequality*. Enviado a *Canadian J. Math.*
- [5] BALL, K.: *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in \mathbb{R}^n* . *Studia Math* 88 (1988), 69-84.
- [6] BERWALD, L.; *Verallgemeinerung ein Mittelwertsatzes von J. Favard, für positive konkave Funktionen*. *Act Math* 79 (1947), 17-37.
- [7] PETTY C.M. *Projection bodies*. In: *Proc. Colloquium on convexity (Copenhagen 1965)*, 234-241. Kobenhauns Univ. Mat. Inst. Copenhagen 1967.
- [8] PISIER, G.; *The volume of convex bodies and Banach space geometry*. *Cambridge tracks in mathematics* 94. Cambridge University press (1989). ISBN 978-0-521-36465-2.
- [9] SCHNEIDER R.; *The Brunn-Minkowski Theory*. Second Expanded Edition. Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Germany. Cambridge University Press (2014). ISBN 978-1-107-60101-7.
- [10] ZHANG, G.; *Restricted chord projection and affine inequalities*. *Geom. Dedic* 39(2) (1991), 213-222.