El teorema de Dvoretzky

Julia Sánchez Loscertales
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: David Alonso Gutiérrez y
Luis Carlos García Lirola
12 de junio de 2023

Abstract

Dvoretzky's theorem was an important result in the development of functional analysis, because it broke with the idea that certain results in finite dimension n moved to infinite dimension immediately when $n \to \infty$. It says that the unit ball of any norm in $\mathbb{R}^n$ has a section with dimension approximately $\log n$, that is almost Euclidean. However, it is not true that any infinite-dimensional Banach space has an infinite-dimensional section almost Euclidean, which is the result that we would get by taking limit in the dimension.

This theorem was proved by Aryeh Dvoretzky in the early 60s, giving answer to a conjecture of Alexander Grothendieck proposed in 1956. This first proof was a little rambling, so several simplifications emerged in the 70s. In particular, in 1971, Vitali Milman proposed a new proof based on the phenomenon of measure concentration on the sphere, which favoured the development of asymptotic geometric analysis, also called asymptotic functional analysis or the local theory of Banach spaces, a field of mathematics that shows phenomena on convex bodies that occur in high dimensions.

Among the various applications of Dvoretzky's theorem within functional analysis, it should be noted that it allowed advancing in the study of the relationship between unconditional convergent series and absolutely convergent series. These two ideas, that coincide in finite dimension, are distinct in general.

The structure of this work consists of four chapters.

In the first chapter, we sketch out the theorem that gives name to this memory. Later, we briefly introduce basic concepts of convexity. In particular, we define convex bodies and also, some important families of convex bodies; we study the Minkowski functional too, which arises naturally when working with them. Furthermore, we include the definition of the usual surface measure on the unit sphere, which is appropriate for the purpose of this work. Finally, we state basic convexity properties, such as the Brunn-Minkowski inequality, that allow us to understand the meaning of Dvoretzky's theorem and its proof.

After, in the second chapter, we discuss in depth the phenomenon of measure concentration on the sphere, a very useful technique in high-dimensional geometry. Informally, it states that if $A \subseteq S^{n-1}$ is a set that occupies, at least, half of the sphere, then almost all points of S^{n-1} are very close to A. At the end of this chapter, we state and prove two results that guarantee the equivalence between the phenomenon of measure concentration on the sphere and the property that says that if $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a Lipschitz continuous function, in "many points", f is close to its median M_f and at the same time, it is close to its average $\mathbb{E}f$.

Already in chapter 3, after defining the concept of $\varepsilon-$ net, we show the proof given by Milman, based on the ideas developed in the previous chapter. Then, using the notion of convex body in John's position and some results related to this idea, we estimate the parameters that appear in this first version of Dvoretzky's theorem to deduce the result stated in this work.

Finally, in chapter 4, we remind some results of numerical series, such as Riemann's theorem. Next, we study series in Banach spaces; in particular, we make a distinction between spaces of finite dimension and spaces of infinite dimension, because although some properties coincide, others that are true in finite dimension cannot be generalized to infinite dimension, for example, Steinitz's theorem. We conclude the chapter by using Dvoretzky's theorem to prove that in every infinite-dimensional Banach space there exists a series that converges unconditionally but not absolutely and we exemplify this fact.

Resumen

El teorema de Dvoretzky fue un resultado importante en el desarrollo del análisis funcional, ya que rompió con la idea de que los resultados ciertos en dimensión finita n se trasladaban a dimensión infinita de manera inmediata al tomar el límite $n \to \infty$. Su enunciado nos dice que la bola unidad de cualquier norma en $\mathbb{R}^n$ tiene una sección de dimensión aproximadamente $\log n$, que es casi euclídea. Sin embargo, no es cierto que cualquier espacio de Banach de dimensión infinita tenga una sección de dimensión infinita casi euclídea, que es el resultado que obtendríamos al tomar límite en la dimensión.

Este teorema fue demostrado por Aryeh Dvoretzky en los primeros años de la década de los 60, dando respuesta a una conjetura de Alexander Grothendieck propuesta en 1956. Esta primera prueba resultó un tanto rebuscada, por lo que en los años 70 surgieron diversas simplificaciones. En particular, en 1971, Vitali Milman propuso una nueva demostración basada en el fenómeno de concentración de medida en la esfera, que favoreció el desarrollo del análisis geométrico asintótico, también llamado teoría local de espacios de Banach o análisis funcional asintótico, una rama de las matemáticas que se centra en mostrar fenómenos sobre cuerpos convexos que ocurren en altas dimensiones.

De entre las diversas aplicaciones del teorema de Dvoretzky dentro del análisis funcional cabe destacar que permitió avanzar en el estudio de la relación entre series incondicionalmente convergentes y series absolutamente convergentes. Estas dos nociones, que coinciden en dimensión finita, son distintas en general.

La estructura de este trabajo está formada por cuatro capítulos.

En el capítulo 1, se comienza enunciando el teorema que da nombre a esta memoria. Posteriormente, se introducen algunas nociones básicas de convexidad. En particular, se definen los cuerpos convexos, y también, algunas familias importantes de cuerpos convexos; además, se nombra el funcional de Minkowski, que surge de manera natural al trabajar con ellos. Asimismo, se incluye la definición de medida de probabilidad uniforme sobre la esfera, que es la adecuada para el propósito de este trabajo. Por último, se enuncian propiedades básicas de convexidad, como la desigualdad de Brunn-Minkowski, que permiten comprender el significado del teorema de Dvoretzky y su demostración.

A continuación, en el capítulo 2, se estudia en profundidad la noción de concentración de medida en la esfera, una técnica muy útil en geometría de altas dimensiones. Informalmente, este fenómeno establece que si $A \subseteq S^{n-1}$ es un conjunto que ocupa, al menos, la mitad de la esfera, entonces casi todos los puntos de S^{n-1} están muy cerca de A. Al final de este capítulo, se enuncian y demuestran dos resultados que garantizan la equivalencia entre el fenómeno de concentración de medida en la esfera y la propiedad de que dada una función Lipschitz $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, en "muchos puntos", f está cerca de su mediana M_f y a la vez está cerca de su esperanza $\mathbb{E}f$.

Ya en el capítulo 3, tras definir el concepto de $\varepsilon-$red, se presenta la demostración dada por Milman, basada en las ideas desarrolladas en el capítulo anterior. Después, utilizando la noción de cuerpo convexo en posición de John y algunos resultados relacionados con esta idea, se estiman los parámetros que aparecen en esta primera versión del teorema de Dvoretzky para deducir el resultado que se enuncia en este trabajo.

Finalmente, en el capítulo 4, se recuerdan algunos resultados de series numéricas, como el teorema de Riemann. Además, se estudian series en espacios de Banach; en concreto, se hace una distinción entre espacios de dimensión finita y espacios de dimensión infinita, ya que aunque algunas propiedades se comparten, otras que son ciertas en dimensión finita no se pueden generalizar a dimensión infinita, como ocurre con el teorema de Steinitz. Se concluye el capítulo usando el teorema de Dvoretzky para demostrar que en todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una serie que converge incondicionalmente pero no absolutamente y se ejemplifica este hecho.

Índice general

Abstract III

Resumen V

1. Introducción 1
- 1.1. Enunciado del teorema de Dvoretzky 1
- 1.2. Definiciones preliminares 1
- 1.3. Resultados previos 4

2. Concentración de medida en la esfera S^{n-1} 7

3. El teorema de Dvoretzky 13
- 3.1. $\varepsilon-$redes sobre la esfera 13
- 3.2. El teorema de Dvoretzky 15

4. Series en espacios de Banach 19
- 4.1. Series numéricas 19
- 4.2. Series en espacios de Banach 19
  - 4.2.1. Series en espacios finito-dimensionales 23
  - 4.2.2. Contraejemplos 24
- 4.3. El teorema de Dvoretzky-Rogers 25

Bibliografía 29

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo, comenzamos enunciando el teorema de Dvoretzky para después dar algunas nociones básicas de teoría de cuerpos convexos que nos permitirán comprender el significado de este teorema. Asimismo se enunciarán algunos resultados que serán de utilidad en el desarrollo del trabajo.

Vamos a centrar nuestro estudio en $\mathbb{R}^n$ dotado del producto escalar estándar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y de la correspondiente norma euclídea $\|\cdot\|_2$. Denotaremos por $B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ la bola euclídea de radio 1 en $\mathbb{R}^n$, $B_2(a,r)$ será la bola euclídea de centro a y radio r, es decir, $B_2(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\|_2 \leq r\}$ y se denotará por S^{n-1} la esfera de $\mathbb{R}^n$, es decir, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$.

1.1. Enunciado del teorema de Dvoretzky

El teorema de Dvoretzky es un teorema fundamental para la geometría en grandes dimensiones que viene a decirnos que todo cuerpo convexo simétrico de dimensión n alta (tendiendo a ∞) tiene una sección de dimensión aproximadamente $\log n$ (que también tiende a ∞) que es casi una bola euclídea (ver Sección 1.2 para los conceptos y notación utilizados). Más concretamente:

Teorema 1.1. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ cuerpo convexo simétrico, existe un subespacio $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que:*

- dim $E = k \geq C(\varepsilon)\log n$.
- *$E \cap K$ es ε-euclídeo, es decir, existe $r > 0$ tal que $(1-\varepsilon)r(B_2^n \cap E) \subseteq K \cap E \subseteq (1+\varepsilon)r(B_2^n \cap E)$.*

Equivalentemente, escrito en términos de normas, el teorema se enuncia así:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para toda norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$, existe un subespacio $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que:

- dim $E = k \geq C(\varepsilon)\log n$.
- *Existe $M > 0$ tal que $(1-\varepsilon)M\|x\|_2 \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)M\|x\|_2, \quad \forall x \in E$.*

Observación. Las últimas desigualdades son ciertas para todo $x \in E$ si y solo si son ciertas para todo $x \in S^{n-1} \cap E$.

1.2. Definiciones preliminares

En esta sección, vamos a definir algunos de los términos que aparecen en el teorema así como otros conceptos que serán necesarios en su demostración:

Definición 1. Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo* si para todo $a, b \in C$, el segmento $[a,b]$ está contenido en C. Equivalentemente, C es convexo si $(1-t)a + tb \in C$ para todo $t \in [0,1]$.

Definición 2. Un *recubrimiento abierto* de un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico es una familia de conjuntos abiertos $\mathscr{C} = \{O_i\}_{i\in I}$ de X, tales que su unión cubre a A, es decir, $\bigcup_{i\in I} O_i \supseteq A$.

Dado un recubrimiento $\mathscr{C}$ de un conjunto A, un *subrecubrimiento* $\mathscr{D}$ es una subfamilia $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$ que sigue siendo un recubrimiento de A, es decir, una subcolección de conjuntos de $\mathscr{C}$ que aún cubre a A.

Definición 3. Un espacio topológico X se dice *compacto* si, para todo recubrimiento abierto de X, existe un subrecubrimiento finito del mismo.

Definición 4. Un *cuerpo convexo* en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo compacto con interior no vacío.

Figura 1.1: K es convexo y K' no es convexo.

Definición 5. Un cuerpo convexo K se dice *simétrico* si es centralmente simétrico con respecto al origen, es decir, un punto x se encuentra en K si y solo si su antípoda, $-x$, también se encuentra en K.

Definición 6. Dado un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene al 0 en su interior, se define *el funcional de Minkowski asociado al cuerpo* K como:

$$\|x\|_K = \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

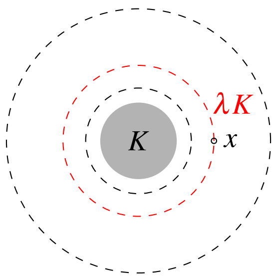

Figura 1.2: $\|x\|_K = \lambda$.

Observación. Los cuerpos convexos simétricos están en una correspondencia uno a uno con las bolas unidad de normas sobre $\mathbb{R}^n$.

Por un lado, dada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$, su bola unidad cerrada $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ es un cuerpo convexo simétrico.

Por otro lado, si K es un cuerpo convexo simétrico, entonces el funcional de Minkowski asociado a K define una norma en $\mathbb{R}^n$ cuya bola unidad es precisamente K.

Una familia importante de cuerpos convexos que nos aparecerá más adelante son los elipsoides:

Definición 7. Un *elipsoide* en $\mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo de la forma:

$$\mathscr{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} \leq 1 \right\},$$

donde $\{v_i\}_{i=1}^n$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0,\infty)$ (son las direcciones y las longitudes de los semiejes de $\mathscr{E}$, respectivamente).

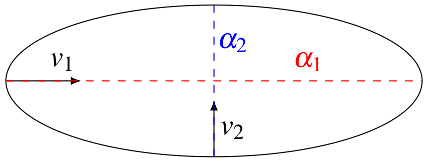

Figura 1.3: Elipsoide en $\mathbb{R}^2$.

Observación. Notemos que $\mathscr{E} = T(B_2^n)$ donde T es una transformación lineal en $\mathbb{R}^n$ definida positiva dada por $T(v_i) = \alpha_i v_i$, $i = 1, \dots, n$. Por lo tanto, un elipsoide es un cuerpo convexo que proviene de la deformación de la bola unidad.

A continuación, vamos a definir una medida en $\mathbb{R}^n$ que se adapte a nuestro propósito. Para ello, dado $A \subseteq S^{n-1}$, denotamos por $\tilde{A} = \{\alpha x : x \in A, \alpha \in [0,1]\} \subseteq B_2^n$ la unión de todos los segmentos que conectan puntos de A con el origen. Gráficamente:

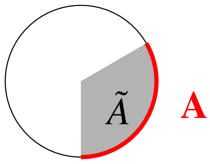

Figura 1.4: Conjunto $\tilde{A}$.

Definición 8. Dado $A \subseteq S^{n-1}$ medible Borel, se define la *medida de probabilidad uniforme sobre la esfera* como:

$$\sigma(A) = \frac{|\tilde{A}|}{|B_2^n|}$$

donde $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue.

Observación. La definición anterior se puede interpretar como que σ es una medida de probabilidad, de manera que S^{n-1} tenga medida uno. Así, para un subconjunto $A \subseteq S^{n-1}$, $\sigma(A)$ es la medida de A y también la probabilidad de que un punto aleatorio distribuido uniformemente en la esfera S^{n-1} esté en A.

También cabe resaltar que dado A como en la definición anterior,

$$\sigma(A) = \frac{|A|}{|S^{n-1}|},$$

donde $|\cdot|$ es el área de superficie o medida de Hausdorff en S^{n-1}.

El *área de superficie* de un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se define como el contenido de Minkowski:

$$|\partial K| = \liminf_{t \to 0^+} \frac{|K + tB_2^n| - |K|}{t}$$

siendo ∂K la frontera de K y $K + tB_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,K) \leq t\}$.

Estamos denotando de la misma forma la medida de Lebesgue y el área de superficie; sin embargo, esto no da lugar a confusión porque el contexto permite deducir a cuál de los dos conceptos nos referimos.

En lo que sigue, denotamos por $O(n) = \{A$ matriz invertible de dimensión $n : AA^T = A^T A = I_n\}$ el conjunto de transformaciones lineales ortogonales e identificamos el conjunto de matrices reales de dimensión n con $\mathbb{R}^{n^2}$, de manera que los conjuntos medibles Borel en $O(n)$ se corresponden con los conjuntos medibles Borel de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Observación. Es conocido, aunque no trivial, que σ es la única medida de probabilidad invariante por rotación, es decir, dado $A \subseteq S^{n-1}, \sigma(A) = \sigma(UA)$, para todo $U \in O(n)$.

Esta medida que acabamos de definir está estrechamente relacionada con la medida de Haar. De hecho, en el capítulo 3 se verá explícitamente la conexión entre ambas:

Definición 9. La *medida de Haar* ν sobre el grupo otogonal $O(n)$ es la única medida de probabilidad invariante por rotación, es decir, es la única medida de probabilidad tal que para todo A subconjunto medible Borel de $O(n)$ y para todo $U \in O(n)$, $\nu(A) = \nu(\{Uv : v \in A\})$.

Para más información consultar [5, PART I, Section 1].

Concluimos la sección con un par de nociones que hay que tener en mente para comprender los resultados posteriores:

Definición 10. Una *mediana* (M_f) de una función $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un número real tal que:

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : f(x) \geq M_f\}) \geq \frac{1}{2} \;\; \text{y} \;\; \sigma(\{x \in S^{n-1} : f(x) \leq M_f\}) \geq \frac{1}{2},$$

donde σ es la medida de probabilidad uniforme en S^{n-1}.

Definición 11. Una función $f\colon\, S^{n-1} \to \mathbb{R}$ se dice *Lipschitziana o función Lipschitz* si existe una constante $\sigma_f > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq \sigma_f \, \|x - y\|_2 \,, \quad \forall x, y \in S^{n-1}.$$

1.3. Resultados previos

En esta sección, se introduce el enunciado de algunos resultados que necesitaremos en el desarrollo de este trabajo. En la mayoría de ellos, debido a que son ampliamente conocidos, simplemente indicaremos dónde es posible encontrar su demostración.

Teorema 1.2. *El volumen n-dimensional de una bola euclídea de radio r en $\mathbb{R}^n$ viene dado por:*

$$|B_2(0,r)| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} r^n.$$

Demostración. Consultar [7]. □

Teorema 1.3. *(Desigualdad de Brunn-Minkowski) Para cualesquiera conjuntos medibles Borel no vacíos $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ y para todo $0 \leq \lambda \leq 1$:*

$$|A|^{1-\lambda} |B|^{\lambda} \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|.$$

Equivalentemente, para todos $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos medibles Borel no vacíos:

$$|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \leq |A+B|^{\frac{1}{n}},$$

donde $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ es la suma de Minkowski (ver figura 1.5).

Demostración. La demostración se puede encontrar en [2, pág. 9]. □

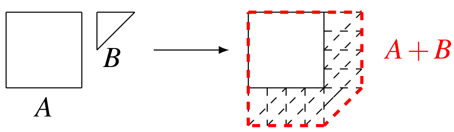

Figura 1.5: Suma de Minkowski.

Teorema 1.4. *(Desigualdad de Jensen) Sea* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio de medida tal que* $\mu(\Omega) = 1$*. Si* g *es una función real* $\mu-$*integrable y* ϕ *es una función real convexa, entonces:*

$$\phi\left(\int_\Omega g d\mu\right) \leq \int_\Omega \phi \circ g d\mu.$$

Usando la notación probabilística habitual, la desigualdad de Jensen puede escribirse como:

$$\phi(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}(\phi(X)),$$

siendo X *una variable aleatoria distribuida según la probabilidad* μ *y* $\mathbb{E}X$ *su esperanza.*

Demostración. Consultar [6, pág. 62]. □

Teorema 1.5. *(Desigualdad de Markov) Sea* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio de medida, sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función medible no negativa y sea* $v > 0$*. Entonces:*

$$\mu(\{x \in \Omega : f(x) \geq v\}) \leq \frac{1}{v} \int_\Omega f d\mu.$$

Demostración. Como f es una función no negativa, dado $v > 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_\Omega f d\mu &= \int_{\{x\in\Omega: f(x)\geq v\}} f d\mu + \int_{\{x\in\Omega: f(x)<v\}} f d\mu \\ &\geq \int_{\{x\in\Omega: f(x)\geq v\}} f d\mu \geq \int_{\{x\in\Omega: f(x)\geq v\}} v d\mu = v\mu(\{x \in \Omega : f(x) \geq v\}), \end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado.

□

Capítulo 2

Concentración de medida en la esfera S^{n-1}

El objetivo de este capítulo es demostrar el siguiente resultado basándonos en el desarrollo llevado a cabo en [4]:

Teorema 2.1. *Existen $c, c' > 0$ constantes absolutas tales que dados $n \in \mathbb{N}$ y $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz con constante σ_f, entonces:*

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - \mathbb{E}f| > t\}) \leq c e^{-\frac{c' t^2 n}{\sigma_f^2}}, \quad \forall t \geq 0,$$

donde $\mathbb{E}f = \int_{S^{n-1}} f(x) d\sigma(x)$.

La demostración de este teorema se obtiene como corolario de una serie de tres resultados que enunciamos y demostramos en este capítulo.

El primero de estos resultados se denomina teorema de concentración de medida en la esfera:

Teorema 2.2. *(Concentración de medida en la esfera) : Sea $A \subseteq S^{n-1}$ un subconjunto medible Borel con $\sigma(A) \geq \frac{1}{2}$ y sea A_t el t-entorno de A en S^{n-1}, es decir, $A_t = \{x \in S^{n-1} : \exists z \in A, \|x - z\|_2 \leq t\}$. Entonces:*

$$1 - \sigma(A_t) < 2e^{-\frac{t^2 n}{4}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Observación. La desigualdad dada no es ajustada, la mejor estimación es lo que se conoce como desigualdad isoperimétrica en S^{n-1}, que establece que, en las condiciones del teorema anterior:

$$1 - \sigma(A_t) \leq 2\mathrm{e}^{-\frac{t^2 n}{32}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demostración. En primer lugar, notemos que si $t \geq 2$, entonces se tiene que $A_t = S^{n-1}$ y es inmediato que $1 - \sigma(A_t) = 0 < 2\mathrm{e}^{-\frac{t^2 n}{4}}$.

Sea $t \in [0, 2]$ y $B = S^{n-1} \setminus A_t$. Entonces, tenemos que $\|a - b\|_2 \geq t$ para todo $a \in A$, $b \in B$. Tomamos ahora $\tilde{x} \in \tilde{A}$, $\tilde{y} \in \tilde{B}$ cualesquiera donde $\tilde{x} = \alpha x$, $\tilde{y} = \beta y$ con $x \in A$, $y \in B$, $\alpha, \beta \in (0, 1]$.

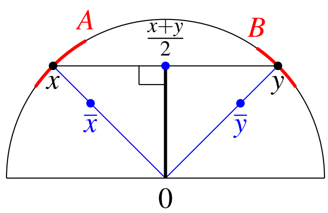

Figura 2.1: Esquema del teorema de Pitágoras.

Usando el teorema de Pitágoras (ver figura 2.1):

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2^2 = \|x\|_2^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_2^2 = 1 - \frac{1}{4}\|x-y\|_2^2 \leq 1 - \frac{t^2}{4}.$$

Por lo tanto, tomando raíces cuadradas:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2 \leq \sqrt{1-\frac{t^2}{4}} \leq \sqrt{1-\frac{t^2}{4}+\frac{t^4}{64}} = \sqrt{\left(1-\frac{t^2}{8}\right)^2} = 1-\frac{t^2}{8},$$

porque estamos trabajando con $t \in [0,2]$.

Ahora pasamos a $\tilde{x} \in \tilde{A}$, $\tilde{y} \in \tilde{B}$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $\alpha \leq \beta$, luego:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right\|_2 &= \left\|\frac{\alpha x+\beta y}{2}\right\|_2 = \beta\left\|\frac{\frac{\alpha}{\beta}x+y}{2}\right\|_2 \leq \left\|\frac{\frac{\alpha}{\beta}x+y}{2}\right\|_2 \leq \frac{\alpha}{\beta}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2 + \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left\|\frac{y}{2}\right\|_2 \\ &\leq \frac{\alpha}{\beta}\left(1-\frac{t^2}{8}\right) + \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{2} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}-\frac{t^2}{8}\right)+\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}-\frac{t^2}{8}+\frac{1}{2} = 1-\frac{t^2}{8},\end{aligned}$$

donde hemos usado primero que $\frac{\alpha}{\beta}x+y = \frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\alpha}{\beta}y-\frac{\alpha}{\beta}y+y = \frac{\alpha}{\beta}(x+y)+(1-\frac{\alpha}{\beta})y$, para aplicar la desigualdad triangular, y al final, hemos aplicado que por la suposición $\alpha \leq \beta$, se tiene que $\frac{\alpha}{\beta} \leq 1$.

Así tenemos:

$$\left\|\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right\|_2 \leq 1-\frac{t^2}{8} \Longrightarrow \frac{1}{2}(\tilde{A}+\tilde{B}) \subseteq B_2\left(0, 1-\frac{t^2}{8}\right).$$

Aplicando ahora la desigualdad de Brunn-Minkowski enunciada en el Teorema 1.3 con $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$|B_2^n|\left(1-\frac{t^2}{8}\right)^n \geq \left|\left(\frac{1}{2}(\tilde{A}+\tilde{B})\right)\right| \geq \sqrt{|\tilde{A}||\tilde{B}|} = |B_2^n|\sqrt{\sigma(A)\sigma(B)} \geq |B_2^n|\sqrt{\frac{1}{2}\sigma(B)}.$$

Por lo tanto:

$$\sigma(B) = 1-\sigma(A_t) \leq 2\left(1-\frac{t^2}{8}\right)^{2n} = 2\mathrm{e}^{2n\log\left(1-\frac{t^2}{8}\right)} \leq 2\mathrm{e}^{2n\left(\frac{-t^2}{8}\right)} = 2\mathrm{e}^{\frac{-nt^2}{4}},$$

donde hemos usado que $\log(1+x) \leq x$, para todo $x > -1$.

□

Observación. El teorema que acabamos de demostrar se puede interpretar como que la medida de S^{n-1} está concentrada cerca de la frontera de cualquier subconjunto medible $A \subseteq S^{n-1}$ que cubra media esfera.

Este fenómeno resulta sorprendente ya que, por ejemplo, para $n = 101$, el 90 % de la medida de la esfera está concentrada en torno a una banda de altura 0,2.

Los dos siguientes resultados nos permiten probar que el Teorema 2.2 es equivalente al resultado inicial que queremos demostrar.

Teorema 2.3. *Sea σ la medida de probabilidad sobre la esfera y $d(x,y) = \|x-y\|_2$. Son equivalentes:*

1. *Existen $c_1, c_1' > 0$ tales que para toda $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua se cumple que:*

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - M_f| > w_f(t)\}) \leq c_1 e^{-c_1' t^2 n}, \quad \forall t > 0.$$

2. *Existen $c_2, c_2' > 0$ tales que para todo $A \subseteq S^{n-1}$ medible Borel con $\sigma(A) \geq \frac{1}{2}$ se tiene que:*

$$1 - \sigma(A_t) \leq c_2 e^{-c_2' t^2 n}, \quad \forall t > 0.$$

3. *Existen* $c_3, c_3' > 0$ *tales que para toda* $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *Lipschitz se tiene que:*

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - M_f| > t\sigma_f\}) \le c_3 e^{-c_3' t^2 n}, \quad \forall t > 0.$$

Donde M_f *es cualquier mediana de* f, $w_f(t) = \sup_{d(x,y)\le t} |f(x) - f(y)|$ *es el módulo de continuidad uniforme de* f *y* $\sigma_f = \sup_{x\neq y} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}$ *es la constante de Lipschitz de* f.

Demostración. Demostraremos las implicaciones $1) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 1)$, obteniendo además una relación entre las distintas constantes del enunciado:

$\underline{1) \Longrightarrow 3)}$: Sea $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz (en particular, f es uniformemente continua) y sea $t > 0$. Entonces, $\forall x, y \in S^{n-1}$:

$$w_f(t) = \sup_{d(x,y)\le t} |f(x) - f(y)| \le \sup_{d(x,y)\le t} \sigma_f \, d(x,y) \le \sigma_f t$$

luego,

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - M_f| > t\sigma_f\}) \le \sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - M_f| > w_f(t)\}) \le c_1 \mathrm{e}^{-c_1' t^2 n}.$$

Por lo tanto, concluimos que $1) \Longrightarrow 3)$, con $c_3 = c_1$ y $c_3' = c_1'$.

$\underline{3) \Longrightarrow 2)}$: Sea $A \subseteq S^{n-1}$ con $\sigma(A) \ge \frac{1}{2}$. Consideramos la función $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}$ y veamos que es una función Lipschitz con constante $\sigma_f = 1$:

- En primer lugar, $\forall a, a' \in A, \forall x, y \in S^{n-1}$

  $$d(x,a) - d(y,a') = (d(x,a) - d(x,a')) + (d(x,a') - d(y,a')) \le d(a,a') + d(x,y),$$

  usando la desigualdad triangular, que sabemos que es cierta porque d es una distancia.

- Tomando el ínfimo en $a \in A$ y notando que $d(A, a') = 0$, tenemos que $\forall a' \in A, \forall x, y \in S^{n-1}$:

  $$d(x,A) - d(y,a') \le d(A,a') + d(x,y) \Longrightarrow d(x,A) \le d(x,y) + d(y,a').$$

- Ahora, tomamos el ínfimo en $a' \in A$, de manera que $\forall x, y \in S^{n-1}$:

  $$d(x,A) \le d(y,A) + d(x,y) \Longrightarrow d(x,A) - d(y,A) \le d(x,y).$$

- Intercambiando el papel de $x, y \in S^{n-1}$, obtenemos que:

  $$d(y,A) - d(x,A) \le d(x,y) \Longleftrightarrow -d(x,y) \le d(x,A) - d(y,A).$$

  Por lo tanto, concluimos que $|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$, de donde se deduce que f es Lipschitz con $\sigma_f = 1$.

A continuación, notemos que $A \subseteq \{x \in S^{n-1} : d(x,A) \ge 0\}$ y $A \subseteq \{x \in S^{n-1} : d(x,A) \le 0\}$, luego:

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : d(x,A) \ge 0\}) \ge \sigma(A) \ge \frac{1}{2}$$

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : d(x,A) \le 0\}) \ge \sigma(A) \ge \frac{1}{2}$$

y por lo tanto, $M_f = 0$ es una mediana de $f(x) = d(x,A)$.

Por consiguiente, aplicando la hipótesis 3):

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x)| > t\}) = \sigma(\{x \in S^{n-1} : d(x,A) > t\}) = \sigma(A_t^c) \leq c_3 \mathrm{e}^{-c_3' t^2 n}.$$

Así, 3) $\Longrightarrow$ 2), con $c_2 = c_3$ y $c_2' = c_3'$.

2) $\Longrightarrow$ 1): Sea $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua y sea $t > 0$. Tomamos los conjuntos dados por $A = \{x \in S^{n-1} : f(x) \geq M_f\}$ con $\sigma(A) \geq \dfrac{1}{2}$ y $B = \{x \in S^{n-1} : f(x) \leq M_f\}$ con $\sigma(B) \geq \dfrac{1}{2}$, por la Definición 10 de mediana. Entonces:

- Dado $x \in A_t, \exists a \in A$ tal que $d(x,a) \leq t$ y entonces:

  $$f(x) = f(x) - f(a) + f(a) \geq M_f + f(x) - f(a) \geq M_f - |f(x) - f(a)| \geq M_f - w_f(t),$$

  por lo tanto, $A_t \subseteq \{x \in S^{n-1} : f(x) \geq M_f - w_f(t)\}$.

- Dado $x \in B_t, \exists b \in B$ tal que $d(x,b) \leq t$ y entonces:

  $$f(x) = f(x) - f(b) + f(b) \leq M_f + f(x) - f(b) \leq M_f + |f(x) - f(b)| \leq M_f + w_f(t),$$

  por lo tanto, $B_t \subseteq \{x \in S^{n-1} : f(x) \leq M_f + w_f(t)\}$.

Así pues, tenemos que:

$$\begin{aligned} & \sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - M_f| \leq w_f(t)\}) \\ = \;& \sigma(\{x \in S^{n-1} : f(x) \geq M_f - w_f(t)\} \cap \{x \in S^{n-1} : f(x) \leq M_f + w_f(t)\}) \\ \geq \;& \sigma(A_t \cap B_t). \end{aligned}$$

Por último, basta notar:

$$\begin{aligned} & \sigma((A_t \cap B_t)^c) = \sigma(A_t^c \cup B_t^c) \leq \sigma(A_t^c) + \sigma(B_t^c) \leq 2c_2 \mathrm{e}^{-c_2' t^2 n} \Longrightarrow \\ & \sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - M_f| > w_f(t)\}) \leq \sigma((A_t \cap B_t)^c) \leq 2c_2 \mathrm{e}^{-c_2' t^2 n}. \end{aligned}$$

En conclusión, 2) $\Longrightarrow$ 1), con $c_1 = 2c_2$ y $c_1' = c_2'$. □

Observación. Sabemos por el Teorema 2.2 que la propiedad 2) es cierta con $c_2 = 2, c_2' = \frac{1}{4}$, entonces 3) y 1) también serán ciertas con constantes absolutas. En particular, $c_1 = c_3 = 4, c_1' = c_3' = \frac{1}{4}$.

Por último, enunciamos y demostramos una proposición que relaciona la mediana y la esperanza de una función en el contexto en el que nos encontramos:

Proposición 2.4. *Sea σ la medida de probabilidad sobre la esfera. Son equivalentes:*

1. *Existen $c_1, c_1' > 0$ tales que para toda función medible $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$,*

   $$\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - \mathbb{E}f| > t\}) \leq c_1 e^{-c_1' t^2}, \quad \forall t > 0.$$

2. *Existen $c_2, c_2' > 0$ tales que para toda función medible $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$,*

   $$\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - M_f| > t\}) \leq c_2 e^{-c_2' t^2}, \quad \forall t > 0.$$

Demostración. Demostramos por doble implicación:

1) $\Longrightarrow$ 2) : Tomamos $t_0 > 0$ dependiente de c_1, c_1' tal que $c_1 \mathrm{e}^{-c_1' t_0} < \frac{1}{2}$. Así, para ese t_0 tenemos:

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - \mathbb{E}f| > t_0\}) \leq c_1 \mathrm{e}^{-c_1' t_0} < \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : f(x) > \mathbb{E}f + t_0\}) < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \sigma(\{x \in S^{n-1} : f(x) < \mathbb{E}f - t_0\}) < \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, cualquier mediana M_f de f tiene que cumplir $\mathbb{E}f - t_0 \leq M_f \leq \mathbb{E}f + t_0 \Longleftrightarrow |M_f - \mathbb{E}f| \leq t_0$.

Así, para todo $x \in S^{n-1}$ se tiene que:

$$|f(x) - M_f| = |f(x) - \mathbb{E}f + \mathbb{E}f - M_f| \leq |f(x) - \mathbb{E}f| + |\mathbb{E}f - M_f| \leq |f(x) - \mathbb{E}f| + t_0.$$

Distinguimos ahora varios casos:

- Si $t \geq 2t_0$, entonces $\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - M_f| > t\}) \leq \sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - \mathbb{E}f| + t_0 > t\}) = \sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - \mathbb{E}f| > t - t_0\}) \leq c_1 \mathrm{e}^{-c_1'(t-t_0)^2} \leq c_1 \mathrm{e}^{-c_1' \frac{t^2}{4}}$ porque estamos estudiando el caso $t_0 \leq \frac{t}{2} \Longrightarrow t - t_0 \geq \frac{t}{2}$.
- Si $t_0 \leq t \leq 2t_0$, entonces $\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - M_f| > t\}) \leq c_1 \mathrm{e}^{-c_1'(t-t_0)^2} = c_1 \mathrm{e}^{-c_1' t^2} \mathrm{e}^{2c_1' t t_0} \mathrm{e}^{-c_1' t_0^2} \leq c_1 \mathrm{e}^{-c_1' t_0^2} \mathrm{e}^{4c_1' t_0^2} \mathrm{e}^{-c_1' t^2} = c_1 \mathrm{e}^{3c_1' t_0^2} \mathrm{e}^{-c_1' t^2} \leq c_1 \mathrm{e}^{3c_1' t_0^2} \mathrm{e}^{-c_1' \frac{t^2}{4}}$.
- Si $0 < t < t_0$, entonces $\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - M_f| > t\}) \leq 1 = \mathrm{e}^{\frac{c_1' t_0^2}{4}} \mathrm{e}^{\frac{-c_1' t_0^2}{4}} \leq \mathrm{e}^{\frac{c_1' t_0^2}{4}} \mathrm{e}^{\frac{-c_1' t^2}{4}}$.

Por lo tanto, concluimos que 1) $\Longrightarrow$ 2) con $c_2 = \text{máx}\{c_1, c_1 \mathrm{e}^{3c_1' t_0^2}, \mathrm{e}^{\frac{c_1' t_0^2}{4}}\}$ y $c_2' = \frac{c_1'}{4}$.

2) $\Longrightarrow$ 1) : Considerando la medida producto $\sigma \otimes \sigma$, $\forall t > 0$:

$$\begin{aligned}
&\sigma \otimes \sigma(\{(x,\bar{x}) \in S^{n-1} \times S^{n-1} : |f(x) - f(\bar{x})| > t\}) \\
&= \sigma \otimes \sigma(\{(x,\bar{x}) \in S^{n-1} \times S^{n-1} : |f(x) - M_f + M_f - f(\bar{x})| > t\}) \\
&\leq \sigma \otimes \sigma(\{(x,\bar{x}) \in S^{n-1} \times S^{n-1} : |f(x) - M_f| + |M_f - f(\bar{x})| > t\}) \\
&\leq \sigma \otimes \sigma\left(\left\{(x,\bar{x}) \in S^{n-1} \times S^{n-1} : |f(x) - M_f| > \frac{t}{2}\right\} \cup \left\{(x,\bar{x}) \in S^{n-1} \times S^{n-1} : |f(\bar{x}) - M_f| > \frac{t}{2}\right\}\right) \\
&= 2\sigma\left(\left\{x \in S^{n-1} : |f(x) - M_f| > \frac{t}{2}\right\}\right) \leq 2c_2 \mathrm{e}^{-c_2' \frac{t^2}{4}}.
\end{aligned}$$

Así, para cualquier $\lambda > 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\sigma\otimes\sigma}(\mathrm{e}^{\lambda^2 |f(x) - f(\bar{x})|^2}) &= 1 + \int_0^\infty 2\lambda^2 t \mathrm{e}^{\lambda^2 t^2} \sigma \otimes \sigma(\{(x,\bar{x}) \in S^{n-1} \times S^{n-1} : |f(x) - f(\bar{x})| > t\}) dt \\
&\leq 1 + 2c_2 \int_0^\infty 2\lambda^2 t \mathrm{e}^{\lambda^2 t^2 - c_2' \frac{t^2}{4}} dt,
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se obtiene aplicando el teorema de Fubini (lo podemos aplicar porque estamos en un espacio de medida σ-finito):

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty 2\lambda^2 t \mathrm{e}^{\lambda^2 t^2} \sigma \otimes \sigma(\{(x,\bar{x}) \in S^{n-1} \times S^{n-1} : |f(x) - f(\bar{x})| > t\}) dt \\
= &\int_0^\infty \int_{S^{n-1} \otimes S^{n-1}} 2\lambda^2 t \mathrm{e}^{\lambda^2 t^2} \chi_{\{(x,\bar{x}) \in S^{n-1} \times S^{n-1} : |f(x) - f(\bar{x})| > t\}} (d\sigma \otimes d\sigma) \otimes dt \\
= &\int_{S^{n-1} \otimes S^{n-1}} \int_0^\infty 2\lambda^2 t \mathrm{e}^{\lambda^2 t^2} \chi_{\{(x,\bar{x}) \in S^{n-1} \times S^{n-1} : |f(x) - f(\bar{x})| > t\}} dt \otimes (d\sigma \otimes d\sigma) \\
= &\int_{S^{n-1} \otimes S^{n-1}} \int_0^{|f(x) - f(\bar{x})|} 2\lambda^2 t \mathrm{e}^{\lambda^2 t^2} dt \otimes (d\sigma \otimes d\sigma) = \int_{S^{n-1} \otimes S^{n-1}} \mathrm{e}^{\lambda^2 t^2} \Big|_0^{|f(x) - f(\bar{x})|} (d\sigma \otimes d\sigma) \\
= &\int_{S^{n-1} \otimes S^{n-1}} \mathrm{e}^{\lambda^2 |f(x) - f(\bar{x})|^2} (d\sigma \otimes d\sigma) - \int_{S^{n-1} \otimes S^{n-1}} (d\sigma \otimes d\sigma) = \int_{S^{n-1} \otimes S^{n-1}} \mathrm{e}^{\lambda^2 |f(x) - f(\bar{x})|^2} (d\sigma \otimes d\sigma) - 1 \\
= &\ \mathbb{E}_{\sigma\otimes\sigma}(\mathrm{e}^{\lambda^2 |f(x) - f(\bar{x})|^2}) - 1.
\end{aligned}$$

Eligiendo $\lambda = \sqrt{\frac{c_2'}{8}}$, tenemos que:

$$\mathbb{E}_{\sigma\otimes\sigma}(\mathrm{e}^{\frac{c_2'}{8}|f(x)-f(\bar{x})|^2}) \leq 1 + c_2 \int_0^\infty 2\frac{c_2'}{8} t \mathrm{e}^{-c_2'\frac{t^2}{8}} dt = 1 + 2c_2 \mathrm{e}^{-c_2'\frac{t^2}{8}}\Big|_0^\infty = 1 + 2c_2.$$

Por lo tanto, por la desigualdad de Jensen enunciada en el Teorema 1.4, como $\mathrm{e}^{\frac{c_2'}{8}|f(x)-\cdot|^2}$ es una función convexa para cualquier x, tenemos que $\forall x \in S^{n-1}$:

$$\mathrm{e}^{\frac{c_2'}{8}|f(x)-\mathbb{E}f(\bar{x})|^2} \leq \mathbb{E}\mathrm{e}^{\frac{c_2'}{8}|f(x)-f(\bar{x})|^2} \Longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{e}^{\frac{c_2'}{8}|f(x)-\mathbb{E}f(\bar{x})|^2} \leq \mathbb{E}_{\sigma\otimes\sigma}\mathrm{e}^{\frac{c_2'}{8}|f(x)-f(\bar{x})|^2} \leq 1 + 2c_2.$$

Finalmente, por la desigualdad de Markov enunciada en el Teorema 1.5:

$$\begin{aligned}\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - \mathbb{E}f| > t\}) &= \sigma(\{x \in S^{n-1} : \mathrm{e}^{\frac{c_2'}{8}|f(x)-\mathbb{E}f(x)|^2} > \mathrm{e}^{\frac{c_2'}{8}t^2}\}) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\mathrm{e}^{\frac{c_2'}{8}|f(x)-\mathbb{E}f(x)|^2}}{\mathrm{e}^{\frac{c_2'}{8}t^2}} \leq (1+2c_2)\mathrm{e}^{-\frac{c_2'}{8}t^2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, 2) $\Longrightarrow$ 1) con $c_1 = 1 + c_2$, $c_1' = \frac{c_2'}{8}$.

□

Observación. Como consecuencia de los Teoremas 2.2 y 2.3 para cualquier $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ Lipschitz, 2) es cierto con $c_2 = 4, c_2' = \frac{n}{4\sigma_f^2}$. Entonces, 1) también será cierto con las constantes:

- $c_1 = 1 + c_2 = 5$,
- $c_1' = \frac{c_2'}{8} = \frac{n}{32\sigma_f^2}$,

de manera que queda probado el Teorema 2.1.

Capítulo 3

El teorema de Dvoretzky

En este capítulo vamos demostrar el teorema de Dvoretzky. En concreto, daremos la prueba que llevó a cabo Milman en la década de los años 70 y posteriormente indicaremos cómo obtener el Teorema 1.1, aunque no daremos la demostración completa por falta de espacio.

3.1. $\varepsilon-$redes sobre la esfera

Antes de entrar en la demostración del teorema de Dvoretzky es necesario introducir el concepto de $\varepsilon-$red.

Definición 12. Decimos que $W \subseteq S^{n-1}$ es una $\varepsilon-$ *red en* S^{n-1} si se cumple que para todo $x \in S^{n-1}$, existe $y \in W$ tal que $\|x-y\|_2 < \varepsilon$.

Comenzamos demostrando unos lemas técnicos que nos serán de ayuda para cumplir nuestro objetivo. El primero de ellos nos proporciona la existencia de $\varepsilon-$redes con un número controlado de puntos:

Lema 3.1. *Dado* $0 < \varepsilon < 1$*, existe* $W \subseteq S^{n-1}$ $\varepsilon-$ *red con* $card(W) \leq \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^n$.

Demostración. Sea $W = \{x_i\}_{i\in I}$ con $x_i \in S^{n-1}, \forall i \in I$, un conjunto maximal respecto a la condición $\|x-y\|_2 \geq \varepsilon$, $\forall x \neq y \in W$, cuya existencia viene garantizada por el Lema de Zorn.

Entonces, $\forall z \in S^{n-1}$, $\exists x_i \in W$ tal que $\|x_i - z\|_2 < \varepsilon$: esto se debe a que, o bien $z = x_j$ para algún $j \in \{1,\ldots,m\}$ y entonces basta tomar $x_i = x_j$, o bien $z \notin W$; en tal caso, si no existiese tal $x_i \in W$, entonces $W \subseteq \{z\} \cup W$ con $\{z\} \cup W$ cumpliendo la condición $\|x-y\|_2 \geq \varepsilon$, $\forall x \neq y \in \{z\} \cup W$, luego W no sería maximal llegando a una contradicción. Por lo tanto, W es una $\varepsilon-$red.

Consideramos ahora la colección de conjuntos disjuntos $\{B_2(x_i,\frac{\varepsilon}{2})\}_{i\in I}$ y sea $y \in \bigcup_{i\in I} B_2\left(x_i,\frac{\varepsilon}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
&\exists i \in I \text{ tal que } y \in B_2\left(x_i,\frac{\varepsilon}{2}\right) \Longrightarrow \|y-x_i\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow \\
&\|y\|_2 = \|y-x_i+x_i\|_2 \leq \|y-x_i\|_2 + \|x_i\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}+1 \Longrightarrow y \in B_2\left(0,1+\frac{\varepsilon}{2}\right),
\end{aligned}$$

porque $x_i \in S^{n-1}$. En resumen, observamos que $\bigcup_{i\in I} B_2(x_i,\frac{\varepsilon}{2}) \subseteq B_2(0,1+\frac{\varepsilon}{2})$.

En consecuencia,

$$\left|\bigcup_{i\in I} B_2\left(x_i,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right| = card(W)\left|B_2\left(x_i,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right| \leq \left|B_2(0,1+\frac{\varepsilon}{2})\right| = \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n |B_2^n| \Longrightarrow$$

$$card(W)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n |B_2^n| \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n |B_2^n| \Longrightarrow card(W) \leq \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^n.$$

En conclusión, $card(W) \leq (1+\frac{2}{\varepsilon})^n$. □

Este segundo resultado nos permitirá aplicar una argumento de aproximación en la última parte de la demostración del teorema de Dvoretzky:

Lema 3.2. *Sea* $0 < \varepsilon < 1$ *y* $\|\cdot\|$ *una norma en* $\mathbb{R}^k$ *que cumple* $(1-\varepsilon)\|x\|_2 \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)\|x\|_2$, $\forall x \in W$ *siendo* W *una* $\delta-$*red en* S^{k-1} *con* $\delta < 1$. *Entonces:*

$$\frac{1-\varepsilon-2\delta}{1-\delta}\|x\|_2 \leq \|x\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\delta}\|x\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^k.$$

Demostración. Por homogeneidad, basta demostrar las desigualdades $\forall x \in S^{k-1}$.

Sea $x \in S^{k-1}$, entonces $\exists x_1 \in W$ tal que $\|x - x_1\|_2 < \delta$.

Ahora, por la definición de $\delta-$red, $\exists x_2 \in W$ tal que $\left\|\frac{x-x_1}{\|x-x_1\|_2} - x_2\right\|_2 < \delta$, ya que tenemos que $\frac{x-x_1}{\|x-x_1\|_2} \in S^{k-1}$; por lo tanto, $\|x - x_1 - \|x-x_1\|_2 x_2\|_2 < \delta\|x-x_1\| < \delta^2$ (esta desigualdad es cierta trivialmente si $x = x_1$, luego en el paso anterior podemos dividir excluyendo este caso).

Repetimos el razonamiento de manera que $\exists x_3 \in W$ tal que $\left\|\frac{x-x_1-\|x-x_1\|_2 x_2}{\|x-x_1-\|x-x_1\|_2 x_2\|_2} - x_3\right\|_2 < \delta$, luego tenemos que $\big\|x - x_1 - \|x-x_1\|_2 x_2 - \|x-x_1-\|x-x_1\|_2 x_2\|_2 x_3\big\|_2 < \delta\|x-x_1-\|x-x_1\|_2 x_2\|_2 < \delta^3$.

Reiteradamente, definimos:

$$\delta_1 = 1, \delta_2 = \|x-x_1\|_2 < \delta, \delta_3 = \|x-x_1-\|x-x_1\|_2 x_2\|_2 < \delta^2, \cdots, \delta_i = \left\|x - \sum_{j=1}^{i-1}\delta_j x_j\right\|_2 < \delta^{i-1}$$

y construimos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ de manera que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left\|x - \sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i\right\|_2 \leq \delta^n.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que todas las normas en $\mathbb{R}^k$ son equivalentes, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x - \sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i\right\|_2 = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left\|x - \sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i\right\| = 0.$$

Así, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n}\delta_i\|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{n}\delta^{i-1}(1+\varepsilon) \leq (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{\infty}\delta^{i-1} = \frac{1+\varepsilon}{1-\delta}.$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ y teniendo en cuenta que la norma es continua, deducimos que:

$$\|x\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\delta}.$$

Por otra parte, dado $x \in S^{k-1}, \exists y \in W$ tal que $\|x-y\|_2 < \delta$, luego:

$$\|x\| = \|x-y+y\| \geq \|y\| - \|x-y\| \geq 1-\varepsilon - \frac{1+\varepsilon}{1-\delta}\|x-y\|_2 \geq 1-\varepsilon - \frac{1+\varepsilon}{1-\delta}\delta = \frac{1-\varepsilon-2\delta}{1-\delta}.$$

□

3.2. El teorema de Dvoretzky

En esta sección vamos a demostrar el teorema de Dvoretzky. Comenzamos probando una primera versión para, posteriormente, dar una estimación de los parámetros que en ella aparecen.

Teorema 3.3. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para toda $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$, existe $E \subseteq \mathbb{R}^n$ subespacio tal que:*

1. $\dim E = k \geq C(\varepsilon)\left(\frac{\mathbb{E}\|\cdot\|}{b}\right)^2 n.$
2. $(1-\varepsilon)(\mathbb{E}\|\cdot\|)\,\|x\|_2 \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)(\mathbb{E}\|\cdot\|)\,\|x\|_2, \quad \forall x \in E,$

donde $\mathbb{E}\|\cdot\| = \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\sigma(x)$ *y b es la menor constante que cumple que* $\|x\| \leq b\,\|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Fijamos $x_0 \in S^{n-1}$ y consideramos la medida μ_{x_0} en S^{n-1} definida como:

$$\mu_{x_0}(A) = \nu(\{U \in O(n) : Ux_0 \in A\}), \quad \forall A \subseteq S^{n-1} \quad \text{medible Borel},$$

donde ν es la probabilidad de Haar sobre $O(n)$ descrita en la Definición 9.

Observamos que μ_{x_0} es una medida de probabilidad sobre S^{n-1} invariante por rotación, luego como σ es la única medida de probabilidad invariante por rotación en S^{n-1}, $\mu_{x_0}(A) = \sigma(A), \forall A \subseteq S^{n-1}$ medible Borel, para cualquier $x_0 \in S^{n-1}$.

Dado $1 \leq k \leq n$, fijamos E_0 subespacio de dimensión k en $\mathbb{R}^n$, por ejemplo, $E_0 = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ y tomamos $S^{k-1} := S^{n-1} \cap E_0$.

Aplicando el Lema 3.1, podemos tomar W una $\varepsilon-$red en S^{k-1} con $card(W) \leq \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^k \leq \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^k$, porque $0 < \varepsilon < 1$.

Asimismo, para cualquier $x_0 \in W$, definimos $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \|x\|$ y $F : O(n) \to \mathbb{R}$ dada por $F(U) = f(Ux_0) = \|Ux_0\|$.

Con esto tenemos que $\forall x, y \in S^{n-1}, |f(x) - f(y)| = |\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\| \leq b\,\|x-y\|_2$ aplicando la definición de la constante b, luego f es Lipschitz con constante b.

Además,

$$\int_{O(n)} |F(u)| d\nu(U) = \int_{O(n)} |f(Ux_0)| d\nu(U) = \int_{S^{n-1}} |f(x)| d\mu_{x_0}(x) = \int_{S^{n-1}} |f(x)| d\sigma(x) = \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\sigma(x)$$

y $\forall t > 0$:

$$\begin{aligned}
\nu(\{U \in O(n) : |F(U) - \int_{O(n)} |F(u)| d\nu(U)| > t\}) &= \nu(\{U \in O(n) : |f(Ux_0) - \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\sigma(x)| > t\}) \\
&= \sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - \mathbb{E}f| > t\}).
\end{aligned}$$

Por el Teorema 2.1, $\exists c_1, c_1' > 0$ tales que:

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - \mathbb{E}f| > t\}) \leq c_1 \mathrm{e}^{-\frac{c_1' t^2 n}{b^2}},$$

luego $\forall x_0 \in W$, tomando $t = \varepsilon \mathbb{E}f$, se tiene que $\nu(\{U \in O(n) : |\,\|Ux_0\| - \mathbb{E}f| > \varepsilon \mathbb{E}f\}) \leq c_1 \mathrm{e}^{-\frac{c_1'(\mathbb{E}f)^2}{b^2}\varepsilon^2 n}$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\nu(\{U \in O(n) : |\,\|Ux\| - \mathbb{E}f| > \varepsilon \mathbb{E}f \text{ para algún } x \in W\}) &\leq card(W) c_1 \mathrm{e}^{-\frac{c_1'(\mathbb{E}f)^2}{b^2}\varepsilon^2 n} \\
&\leq \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^k c_1 \mathrm{e}^{-\frac{c_1'(\mathbb{E}f)^2}{b^2}\varepsilon^2 n} = c_1 \mathrm{e}^{-\frac{c_1'(\mathbb{E}f)^2}{b^2}\varepsilon^2 n + k\log\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)}.
\end{aligned}$$

Eligiendo $k = \frac{c_1'\varepsilon^2}{2\log\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)}\frac{\mathbb{E}f^2}{b^2}n = C(\varepsilon)\frac{\mathbb{E}f^2}{b^2}n$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\nu(\{U \in O(n) : |\,\|Ux\| - \mathbb{E}f| > \varepsilon\mathbb{E}f \text{ para algún } x \in W\}) &\leq c_1 \mathrm{e}^{-\frac{c_1'(\mathbb{E}f)^2}{b^2}\varepsilon^2 n + \frac{c_1'\varepsilon^2}{2}\frac{\mathbb{E}f^2}{b^2}n} \\ &= c_1 \mathrm{e}^{-\frac{c_1'(\mathbb{E}f)^2}{2b^2}\varepsilon^2 n} < 1,\end{aligned}$$

tomando en k una constante proporcional a c_1' adecuada, si es necesario.

En consecuencia, $\nu(\{U \in O(n) : |\,\|Ux\| - \mathbb{E}f| \leq \varepsilon\mathbb{E}f, \quad \forall x \in W\}) > 0$ y así, $\exists U \in O(n)$ tal que:

$$|\,\|Ux\| - \mathbb{E}f| \leq \varepsilon\mathbb{E}f \quad \forall x \in W \iff (1-\varepsilon)\mathbb{E}f \leq \|Ux\| \leq (1+\varepsilon)\mathbb{E}f, \quad \forall x \in W.$$

Además como $U \in O(n)$ implica que $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 = 1$, lo anterior se puede reescribir como:

$$(1-\varepsilon)\mathbb{E}f\,\|Ux\|_2 \leq \|Ux\| \leq (1+\varepsilon)\mathbb{E}f\,\|Ux\|_2\,, \quad \forall x \in W.$$

A continuación, consideramos la norma dada por $|||x||| = \frac{\|Ux\|}{\mathbb{E}f}$ y por el Lema 3.2, como W es una $\varepsilon-$red en S^{k-1}, podemos asegurar que:

$$\begin{aligned}&\frac{1-\varepsilon-2\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\|_2 \leq |||x||| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\|_2\,, \quad \forall x \in E_0 \iff \\ &\frac{1-\varepsilon-2\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathbb{E}f\,\|Ux\|_2 \leq \|Ux\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathbb{E}f\,\|Ux\|_2\,, \quad \forall x \in E_0 \iff \\ &\left(1-\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\mathbb{E}f\,\|Ux\|_2 \leq \|Ux\| \leq \left(1+\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\mathbb{E}f\,\|Ux\|_2\,, \quad \forall x \in E_0.\end{aligned}$$

Es decir, para todo $0 < \varepsilon < 1$, existe un subespacio $E = U(E_0)$ con $\dim\, E = \dim\, E_0 = k = C(\varepsilon)\left(\frac{\mathbb{E}f}{b}\right)^2 n$ y además:

$$\left(1-\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\mathbb{E}f\,\|x\|_2 \leq \|x\| \leq \left(1+\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\mathbb{E}f\,\|x\|_2\,, \quad \forall x \in E.$$

Equivalentemente, $\forall \varepsilon' > 0$ con $\varepsilon' = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}$, existe E con $\dim\, E = k = C(\varepsilon')\left(\frac{\mathbb{E}f}{b}\right)^2 n$ tal que:

$$\left(1-\varepsilon'\right)\mathbb{E}f\,\|x\|_2 \leq \|x\| \leq \left(1+\varepsilon'\right)\mathbb{E}f\,\|x\|_2\,, \quad \forall x \in E.$$

$\square$

Para concluir la demostración del Teorema 1.1 inicial incluimos una serie de resultados que nos conducen a nuestro objetivo, pero cuya demostración no incluimos por falta de espacio.

Comenzamos introduciendo una noción referida a cuerpos convexos:

Definición 13. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Diremos que K está en posición de John si la bola euclídea B_2^n es el elipsoide de máximo volumen contenido en K.

Observación. Es bien conocido, aunque no trivial, que si $B_2^n \subseteq K$, entonces K está en posición de John si y solo si existen $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ números reales positivos y $\{u_j\}_{j=1}^m$ vectores de norma uno en la frontera de K tales que:

$$I_n = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j \otimes u_j, \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j = 0$$

donde I_n es el operador identidad en $\mathbb{R}^n$ y $u \otimes u$ es el operador de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ definido como $u \otimes u(x) = \langle u, x\rangle u$, siendo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^n$. La demostración de este resultado se puede consultar en [2, pág. 57].

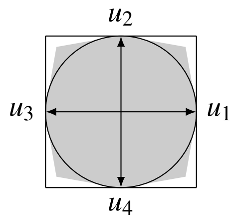

Figura 3.1: Cuerpo convexo en posición de John.

En tal caso, en [2, pág. 170] se demuestra que $\mathbb{E}\,\|\cdot\|_K \geq \mathbb{E}\,\|\cdot\|_\infty \geq C\sqrt{\frac{\log n}{n}}$ para cierta constante $C > 0$ y $b = 1$, de manera que se obtiene:

Teorema 3.4. *Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ tal que la bola unidad de dicha norma, K, está en posición de John. Entonces, existen $C(\varepsilon) > 0$ y un subespacio $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que:*

1. $\dim E \geq C(\varepsilon) \log n$.
2. $(1-\varepsilon)\,\|x\|_2 \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)\,\|x\|_2, \quad \forall x \in E$.

Aplicando a una norma la transformación lineal que lleva su bola unidad a la posición de John (esta transformación existe como consecuencia del teorema de John) y aplicando el Teorema 3.4, se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 3.5. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para toda norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$, existe un subespacio $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y un elipsoide $\mathscr{E} \subseteq E$ tales que:*

1. $\dim E \geq C(\varepsilon) \log n$.
2. $(1-\varepsilon)\,\|x\|_{\mathscr{E}} \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)\,\|x\|_{\mathscr{E}}, \quad \forall x \in E$.

Gráficamente, el corolario anterior en $\mathbb{R}^3$ se puede representar como sigue:

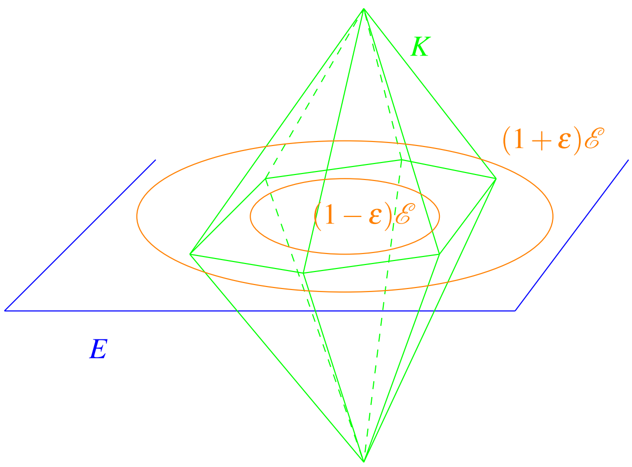

Figura 3.2: Cuerpo convexo, subespacio y secciones.

Finalmente, basta aplicar el siguiente lema para considerar la bola euclídea en vez de un elipsoide y obtener el Teorema 1.1:

Lema 3.6. *Sea $\mathscr{E}$ un elipsoide en $\mathbb{R}^k$ con $k = 2s$ o $k = 2s-1$ para algún $s \geq 1$. Entonces, existe un subespacio s-dimensional F de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathscr{E} \cap F$ es una bola euclídea.*

Demostración. Consultar [2, pág. 172]. □

Capítulo 4

Series en espacios de Banach

El objetivo de este capítulo es demostrar que en todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una serie incondicionalmente convergente que no es absolutamente convergente. Para ello, nos vamos a basar en las ideas desarrolladas en [3].

4.1. Series numéricas

Comenzamos recordando algunas definiciones y propiedades básicas de series numéricas en $\mathbb{R}$.

Definición 14. Una serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} a_k,\ a_k \in \mathbb{R}$ se dice:

- *absolutamente convergente* si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge,
- *condicionalmente convergente* si converge, pero la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverge.

Ejemplo 1. Notemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log 2$ es convergente, pero no absolutamente convergente, pues $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Por lo tanto, tenemos que esta serie es condicionalmente convergente.

Enunciamos a continuación algunos resultados referidos a series numéricas que son de sobra conocidos y cuya demostración se puede encontrar en [1]:

Teorema 4.1. *Supongamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente. Entonces, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y además, para toda permutación π de los números naturales, se verifica que $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$ converge y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$.*

Teorema 4.2. *(Teorema de Riemann) Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie de números reales condicionalmente convergente, entonces:*

1. *Para cualquier $s \in \mathbb{R}$, se puede encontrar una permutación π tal que $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} = s$.*
2. *Se puede encontrar una permutación π tal que $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} = \infty$.*

4.2. Series en espacios de Banach

En esta sección, se introducen algunas definiciones y propiedades de series de elementos en espacios de Banach que no difieren, en lo esencial, de las correspondientes definiciones y propiedades de las series numéricas.

En primer lugar, recordemos qué es un espacio de Banach:

Definición 15. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ una sucesión. Se dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$, se cumple $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Definición 16. Un *espacio de Banach* $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado completo, es decir, un espacio vectorial dotado de una norma en el que toda sucesión de Cauchy es convergente.

Ejemplo 2. Algunos de los espacios de Banach más habituales son:

- Espacios ℓ_p: dado $1 \leq p < \infty$, se define el espacio vectorial $\ell_p = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y la norma $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.
- El espacio $\ell_\infty = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$ y la norma $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
- Espacios L_p: dado un espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ arbitrario y $1 \leq p < \infty$ se define el espacio vectorial $L_p(\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{K}$ medible tal que $\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (en realidad, son clases de equivalencia) y la norma $\|f\|_p = (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$.
- El espacio $(\mathscr{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ donde $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un compacto.
- Dado un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$, $X^* = \{f : X \to \mathbb{R}$ lineales y continuas$\}$ vuelve a ser un espacio de Banach con la norma $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\|_X \leq 1\}$.

Ahora ya podemos hablar de series en espacios de Banach:

Definición 17. Una *serie de elementos de un espacio de Banach* X es una expresión de la forma $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ con $x_k \in X$. Diremos que la serie es convergente si la sucesión de sumas parciales converge en la norma asociada al espacio de Banach X.

Ejemplo 3. Veamos explícitamente algunos ejemplos de series en espacios de Banach concretos:

- Sea el espacio de Banach $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$, sea $x \in \ell_2$ y sea $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal. Es conocido que $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$.
- Sea el espacio de Banach $(\mathscr{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, sea $f_k(x) = \frac{x^k}{k!}$ y sea $f(x) = e^x$. Entonces, $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$.

Vamos ahora a enunciar una serie de resultados referidos a series en espacios de Banach que nos ayudarán a demostrar el resultado principal del capítulo.

Definición 18. Un *segmento* de una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es la suma de un número finito de términos consecutivos de la serie, es decir, $\sum_{k=m+1}^{n} x_k$ para ciertos $m, n \in \mathbb{N}$.

Observación. En ocasiones, se dice que un segmento es el conjunto $\{x_k\}_{k=m+1}^{n}$.

Recordemos también el criterio de convergencia de Cauchy (cuya demostración se puede consultar en [3, pág. 8]), que establece lo siguiente:

Teorema 4.3. *Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ en un espacio de Banach converge si y solo si la sucesión de sus segmentos converge a cero, es decir:*

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| = 0.$$

Veamos un ejemplo de aplicación del criterio de Cauchy:

Ejemplo 4. Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión dada por $x_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, que está en el espacio de Banach $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Notemos que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\|_\infty = \|(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots)\|_\infty = 1,$$

que claramente no tiende a cero.

Por lo tanto, por el criterio de Cauchy, podemos concluir que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ no converge en el espacio ℓ_∞.

A continuación, introducimos nociones análogas a las que hemos definido para series numéricas y recordamos resultados específicos de la reordenación de series:

Definición 19. Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ en un espacio de Banach X se dice:

- *absolutamente convergente* si $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$,
- *incondicionalmente convergente* si converge para cualquier reordenación de sus términos,
- *condicionalmente convergente* si converge, pero no converge incondicionalmente, es decir, existen reordenaciones de la serie divergentes.

Observación. Notemos que para series numéricas hemos dado una definición distinta de serie condicionalmente convergente; sin embargo, como una serie numérica es incondicionalmente convergente si y solo si es absolutamente convergente, concluimos que ambas definiciones son equivalentes.

Estos conceptos conceptos que acabamos de definir están relacionados entre sí de la siguiente forma:

Teorema 4.4. *Si una serie en un espacio de Banach X converge absolutamente, entonces la serie es convergente.*

Demostración. Consultar [3, pág. 8]. □

Teorema 4.5. *Si una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ en un espacio de Banach X es incondicionalmente convergente, entonces todas las reordenaciones de sus términos tienen la misma suma.*

Demostración. Demostramos por reducción al absurdo.

Sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s$ y supongamos que existe una permutación π tal que $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} = s'$ con $s \neq s'$. Tomamos ahora un funcional lineal $f \in X^*$ de manera que $f(s) \neq f(s')$, que existe gracias al teorema de Hahn-Banach. Entonces, la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ no convergerá absolutamente, porque la permutación π cambia el valor de la suma (aplicamos el Teorema 4.1).

Por lo tanto, por el Teorema de Riemann 4.2, existe una permutación π de manera que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_{\pi(k)})$ diverge, luego la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ también es divergente, pues:

$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}\right) = f\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_{\pi(k)}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(x_{\pi(k)}) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_{\pi(k)}).$$

Esto contradice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ sea incondicionalmente convergente. □

Teorema 4.6. *Convergencia absoluta en un espacio de Banach implica convergencia incondicional.*

Demostración. Sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ una serie absolutamente convergente, es decir, $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$; en particular, se puede interpretar como una serie numérica formada por los términos positivos $\{\|x_k\|\}_{k=1}^{\infty}$. Esta serie es absolutamente convergente en el espacio $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, luego es incondicionalmente convergente y así, para cualquier permutación π se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{\pi(k)}\right\|$ converge, luego por el criterio de Cauchy:

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{n} \left\|x_{\pi(k)}\right\| = 0.$$

Usando la desigualdad triangular:

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_{\pi(k)} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left\|x_{\pi(k)}\right\|,$$

luego:

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_{\pi(k)} \right\| = 0.$$

Por el criterio de Cauchy, esto significa que $\sum_{k=1}^{n} x_{\pi(k)}$ converge. Por lo tanto, concluimos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es incondicionalmente convergente.

□

El estudio de la convergencia incondicional de las series aplicando directamente la Definición 19 conlleva ciertas dificultades. Es por ello que se suelen utilizar otras caracterizaciones.

Definición 20. Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ de elementos de un espacio de Banach se dice *perfectamente convergente* si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ converge para cualquier elección de los coeficientes $\alpha_k = \pm 1$.

Teorema 4.7. *Sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ una serie en un espacio de Banach X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La serie converge incondicionalmente.*

2. *Todas las series de la forma $x_{n_1} + x_{n_2} + x_{n_3} + \ldots$ con $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ (es decir, subseries de $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$) convergen.*

3. *La serie converge perfectamente.*

Demostración. Vamos a demostrar que $\underline{1) \iff 2)}$ y $\underline{2) \iff 3)}$.

$\underline{1) \implies 2)}$: Supongamos que 2 no es cierto, es decir, existe una sucesión $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ diverge. Entonces, por el criterio de Cauchy 4.3, existe $\varepsilon > 0$ y números $m_1 < r_1 < m_2 < r_2 < \ldots$ tales que $\left\|\sum_{i=m_k}^{r_k} x_{n_i}\right\| \geq \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Denotamos por $y_1, y_2, y_3, \ldots$ los términos de la serie inicial $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ que no aparecen en ninguno de los segmentos $\{x_{n_i}\}_{i=m_k}^{r_k}$ y construimos la siguiente reordenación de términos: escribimos primero $\{x_{n_i}\}_{i=m_1}^{r_1}$, después y_1; a continuación, escribimos $\{x_{n_i}\}_{i=m_2}^{r_2}$, después y_2 y así sucesivamente.

Por el criterio de Cauchy, esta reordenación de la serie diverge, lo que contradice la hipótesis 1.

$\underline{2) \implies 1)}$: Supongamos que 1 no es cierto y sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ una reordenación divergente de la serie inicial. Por el criterio de Cauchy, existen segmentos disjuntos Δ_i con $i \in \mathbb{N}$ de la reordenación para los que el ínfimo de las normas es mayor que $\varepsilon > 0$.

Permutamos los términos de cada segmento Δ_i reordenándolos de forma creciente (es decir, recuperamos el orden original). Denotamos el índice del primer término (respectivamente del último) de Δ_i con m_i (respectivamente con r_i) de manera que $\Delta_i \subseteq \{x_k\}_{k=m_i}^{r_i}$. Tomando si es necesario una subsucesión, podemos elegir Δ_i tales que $m_i < r_i < m_{i+1} < r_{i+1}$; entonces, escribiendo sucesivamente todos los términos de Δ_1, después los de $\Delta_2, \Delta_3 \ldots$, obtenemos una subserie de $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ que diverge, lo que contradice la hipótesis 2.

$\underline{2) \implies 3)}$: Sea $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria de ± 1. Consideramos la partición $\mathbb{N} = A \cup B$ con $A = \{n_1, n_2, \ldots\}$ el conjunto de índices tal que $\alpha_n = 1$ y $B = \{m_1, m_2, \ldots\}$ el conjunto de índices tales que $\alpha_m = -1$.

Por hipótesis, $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}, \sum_{j=1}^{\infty} x_{m_j}$ convergen, luego $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} - \sum_{j=1}^{\infty} x_{m_j}$ también converge.

$\underline{3) \implies 2)}$: Sean $n_1 < n_2 < \ldots$ índices arbitrarios, $A = \{n_1, n_2, \ldots\}$ y $B = \mathbb{N} \setminus A$. Consideramos las dos siguientes sucesiones de coeficientes:

- $\alpha_i = 1, \forall i \in \mathbb{N}$.

- $\beta_i = 1, \forall i \in A$; $\beta_i = -1, \forall i \in B$.

Por hipótesis, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i$ convergen, luego $x_{n_1} + x_{n_2} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\alpha_i x_i + \beta_i x_i)$ también converge. $\square$

Hemos establecido así una equivalencia entre series incondicionalmente convergentes y perfectamente convergentes. De ahora en adelante, se trabajará con ambos conceptos indistintamente.

4.2.1. Series en espacios finito-dimensionales

En esta subsección, se presentan algunos resultados específicos referidos a espacios de Banach de dimensión finita con el objetivo de generalizar el Teorema de Riemann 4.2.

En primer lugar, tenemos el recíproco del Teorema 4.6 que se demuestra en [3, pág. 11]:

Teorema 4.8. *Sea X un espacio de Banach de dimensión finita. Entonces, cualquier serie incondicionalmente convergente en X es absolutamente convergente.*

Introducimos ahora algunos conceptos que nos serán útiles más adelante:

Definición 21. Sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ una serie en un espacio de Banach X. Se dice que un punto x pertenece al *conjunto de posibles sumas de la serie* si existe una permutación π para la que $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ converge a x. El conjunto de todos estos puntos se denota $SR\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)$.

Por el Teorema de Riemann 4.2, si $X = \mathbb{R}$, para cualquier serie condicionalmente convergente, se verifica $SR\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = X$. Si la dimensión del espacio es mayor que 1, existen series condicionalmente convergentes cuyo conjunto de posibles sumas no coincide con el espacio total. Por ejemplo, si todos los términos de la serie son colineales con un vector e, entonces cualquier reordenación de la serie también será colineal con e. Por lo tanto, el conjunto de posibles sumas de esta serie es una línea que pasa por el origen y el punto e.

Definición 22. Sea X un espacio de Banach y sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ una serie condicionalmente convergente en X. Un funcional lineal $f \in X^*$ se denomina *funcional convergente* para la serie si $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| < \infty$. El conjunto de todos los funcionales convergentes de la serie se denota por Γ y el anulador se denota por $\Gamma^{\perp} = \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in \Gamma\}$.

Observación. Γ y $\Gamma^{\perp}$ son subespacios de X^* y X, respectivamente.

Ya podemos enunciar el teorema de Steinitz (cuya demostración se puede consultar en [3, pág. 17–20]), que es una generalización del Teorema de Riemann 4.2 (pues para $n = 1$, lo implica).

Teorema 4.9. *(Teorema de Steinitz) Sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ una serie condicionalmente convergente en un espacio $m-$dimensional E y sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s$. Entonces, el conjunto de posibles sumas de la serie es el subespacio afín $s + \Gamma^{\perp}$, es decir, $SR\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = s + \Gamma^{\perp}$.*

Observación. Del teorema de Steinitz se deduce que el conjunto de posibles sumas de una serie condicionalmente convergente en un espacio finito-dimensional no puede reducirse a un único punto.

Demostración. En primer lugar, como X tiene dimensión finita y todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, podemos suponer que $X = \mathbb{R}^n$. Por otro lado, puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ es condicionalmente convergente, sabemos que existe una permutación π de manera que $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ diverge. Ahora bien, como tomar límite en $\mathbb{R}^n$ equivale a hacerlo coordenada a coordenada, debe haber una coordenada de la serie que diverja, es decir, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ de modo que $\sum_{k=1}^{\infty} e_i^*(x_{\pi(k)})$ diverge, donde $e_i^*(e_j) = 1$ si $i = j$, $e_i^*(e_j) = 0$ si $i \neq j$. Esto significa que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} e_i^*(x_k)$ no es absolutamente convergente. Por tanto, $e_i^* \notin \Gamma$ y así $\Gamma^{\perp} \neq \{0\}$.

El teorema de Steiniz dice entonces que $SR\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)$ no es un único punto (para que fuera un único punto, sería necesario que $\Gamma^{\perp} = \{0\}$ o equivalentemente, $\Gamma = X^*$). $\square$

Observación. Sea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ una serie condicionalmente convergente en un espacio m-dimensional, entonces $SR\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)$ es un conjunto infinito, en particular, contiene una recta.

Demostración. Por el teorema de Steinitz, sabemos que $SR\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)$ es un subespacio afín, y en la observación anterior, acabamos de probar que el conjunto de posibles sumas de una serie condicionalmente convergente no se reduce a un único punto, luego necesariamente $SR\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)$ es un conjunto infinito y en particular, contiene una recta. $\square$

4.2.2. Contraejemplos

En esta subsección, el objetivo es mostrar algunos ejemplos que ponen de manifiesto que el teorema de Steinitz no se puede generalizar a espacios infinito-dimensionales sin restricciones adicionales.

Veamos un primer ejemplo que muestra una serie condicionalmente convergente en un espacio infinito-dimensional tal que el conjunto de posibles sumas es un único punto.

Ejemplo 5. Sea $X = \ell_2$ y sea $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ la base ortonormal estándar de ℓ_2. Considerar ahora la serie dada por:

$$e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{4}e_3 - \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_3 - \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{8}e_4 - \frac{1}{8}e_4 + \frac{1}{8}e_4 - \frac{1}{8}e_4 + \frac{1}{8}e_4 - \frac{1}{8}e_4 + \frac{1}{8}e_4 - \frac{1}{8}e_4 + \cdots$$

Esta serie converge a e_1; sin embargo, no converge incondicionalmente, ya que la serie en la que todos los signos son positivos es divergente (recordar la equivalencia entre series incondicionalmente convergentes y perfectamente convergentes).

Por otro lado, el conjunto de posibles sumas de esta serie es el punto e_1: en efecto, la proyección de esta serie en cualquier eje de coordenadas contiene solo un número finito de términos no nulos y una suma finita no cambia bajo reordenaciones.

La parte principal de la afirmación del teorema de Steinitz es la linealidad del conjunto $SR(\sum_{k=1}^{\infty} x_k)$, es decir, establece que este conjunto contiene la línea que une dos puntos cualesquiera que pertenezcan al mismo. Sin embargo, esta linealidad no se mantiene en dimensión infinita. Veamos un ejemplo de una serie no absolutamente convergente cuyo conjunto de posibles sumas no es convexo.

Ejemplo 6. Sea $X = L_2[0,1]$ y se consideran los términos:

$$x_{i,k} = \chi_{[k2^{-i},(k+1)2^{-i}]}; \quad y_{i,k} = -x_{i,k}$$

con $0 \le i < \infty, 0 \le k < 2^i$. Gráficamente:

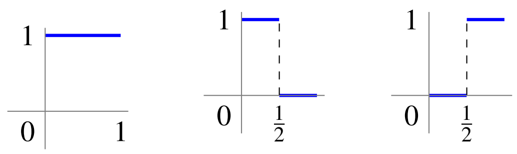

Figura 4.1: x_{00}, x_{10}, x_{11}

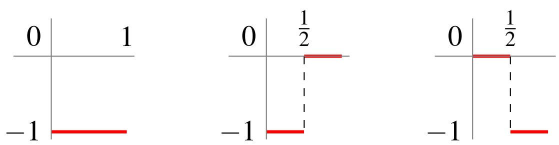

Figura 4.2: y_{00}, y_{10}, y_{11}

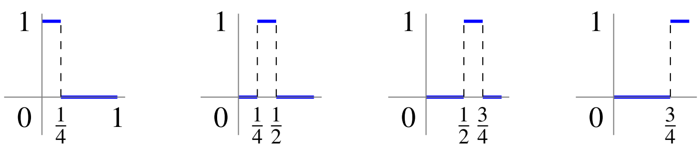

Figura 4.3: $x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$

Por un lado, si consideramos la suma $x_{0,0} + y_{0,0} + x_{1,0} + y_{1,0} + x_{1,1} + y_{1,1} + x_{2,0} + y_{2,0} + \ldots$, entonces, la serie converge a la función 0.

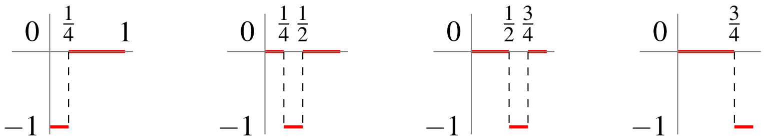

Figura 4.4: $y_{20}, y_{21}, y_{22}, y_{23}$

Por otro lado, si consideramos la reordenación $x_{0,0}+x_{1,0}+x_{1,1}+y_{0,0}+x_{2,0}+x_{2,1}+y_{1,0}+x_{2,2}+x_{2,3}+y_{1,1}+\ldots$, entonces la serie converge a 1.

Sin embargo, no hay ninguna reordenación que haga que la serie correspondiente sume $\frac{1}{2}$, puesto que todas las sumas parciales de la serie toman valores enteros.

4.3. El teorema de Dvoretzky-Rogers

En esta sección presentamos el resultado principal de este capítulo que pone de manifiesto que en espacios de Banach infinito-dimensionales no se tiene la equivalencia entre series absolutamente convergentes e incondicionalmente convergentes, como si ocurre en dimensión finita.

Comenzamos con un ejemplo de este hecho:

Ejemplo 7. Tomamos $X = \ell_2$ y $x_k = (0,0,\ldots,\frac{1}{k},0,\ldots)$ donde la coordenada k-ésima es no nula. Entonces:

- $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots)$ para cualquier reordenación π de los términos de la serie.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.

Vamos ahora con el resultado que demuestra que esto ocurre en cualquier espacio de Banach de dimensión infinita. No vamos a seguir exactamente las ideas de [3], ya que hemos adaptado la prueba para poder utilizar lo que ya hemos demostrado en los capítulos anteriores.

Teorema 4.10. *(Teorema de Dvoretzky-Rogers) Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Para cualquier sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ de números positivos satisfaciendo $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$, existe una serie incondicionalmente convergente $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ en X tal que $\|x_i\| = a_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Comenzamos dividiendo la sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ en segmentos $\{a_i\}_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}$ con $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$ tales que:

$$\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} a_i^2 \le \frac{1}{2^{2j}}, \quad \forall j = 1,2,\ldots$$

Esto lo podemos hacer como consecuencia del criterio de convergencia de Cauchy 4.3.

A continuación, tomamos los primeros m_1 vectores de la serie que queremos construir de manera arbitraria, solamente sujetos a la condición $\|x_i\| = a_i$ para todo $1 \le i \le m_1$.

Para el resto de términos de la serie consideremos $k_j = m_{j+1} - m_j$. Aplicamos el Corolario 3.5 con los parámetros $\varepsilon = \frac{1}{2}, n_j \in \mathbb{N}$ tal que $k_j \le C\left(\frac{1}{2}\right)\log n_j$. Además, dados $e_1,\ldots,e_{n_j} \in X$ vectores linealmente independientes, identificamos $(\mathbb{R}^{n_j}, \|\cdot\|_2) \equiv (\text{span}\{e_1,\ldots,e_{n_j}\}, \|\cdot\|)$. Por lo tanto, existe un subespacio $E \subseteq \text{span}\{e_1,\ldots,e_{n_j}\} \subseteq X$ y un elipsoide $\mathscr{E} \subseteq E$ tales que :

- $\dim E \ge C(\frac{1}{2})\log n_j \ge k_j$. De hecho, no hay problema en suponer que $\dim E = k_j$.
- Para todo $x \in E$:

$$\frac{1}{2}\|x\|_{\mathscr{E}} \le \|x\| \le \frac{3}{2}\|x\|_{\mathscr{E}}.$$

Por ser $\mathscr{E}$ un elipsoide de dimensión k_j, existen vectores $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{k_j}$ en la frontera de $\mathscr{E}$ de manera que:

$$\mathscr{E}=\left\{\sum_{i=1}^{k_j} t_i\overline{x_i} : \sum_{i=1}^{k_j} t_i^2 \leq 1\right\},$$

y además, $E=\operatorname{span}\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{k_j}\}$.

De ahí se obtiene:

$$\left\|\sum_{i=1}^{k_j} t_i\overline{x_i}\right\|_{\mathscr{E}} = \text{ínf}\left\{\lambda>0 : \sum_{i=1}^{k_j} t_i\overline{x_i}\in\lambda\mathscr{E}\right\} = \text{ínf}\left\{\lambda>0 : \sum_{i=1}^{k_j}\frac{1}{\lambda}t_i\overline{x_i}\in\mathscr{E}\right\}$$

$$=\text{ínf}\left\{\lambda>0 : \sum_{i=1}^{k_j}\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^2\leq 1\right\} = \text{ínf}\left\{\lambda>0 : \sum_{i=1}^{k_j} t_i^2\leq\lambda^2\right\} = \left(\sum_{i=1}^{k_j} t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Llamamos $\tilde{x}_i=\frac{\bar{x}_i}{\|\bar{x}_i\|}$, de modo que $\|\tilde{x}_i\|=1$ y $E=\operatorname{span}\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{k_j}\}=\operatorname{span}\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{k_j}\}$.

Así pues tenemos:

$$\left\|\sum_{i=1}^{k_j} t_i\tilde{x}_i\right\| \leq \frac{3}{2}\left\|\sum_{i=1}^{k_j} t_i\frac{\overline{x_i}}{\|x_i\|}\right\|_{\mathscr{E}} = \frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{k_j}\frac{t_i^2}{\|\overline{x_i}\|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{k_j}\frac{t_i^2}{\frac{1}{4}\|\overline{x_i}\|_{\mathscr{E}}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq 3\left(\sum_{i=1}^{k_j} t_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

usando que $\|\bar{x}_i\|_{\mathscr{E}}=1$.

Pongamos ahora $x_{m_j+i}=a_i\tilde{x}_i$ y elegimos $|t_i|=a_i$, de manera que:

$$\max_{\alpha_i=\pm1}\left\|\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}\alpha_i x_i\right\| \leq 3\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ que hemos construido satisface que $\|x_i\|=a_i$ para todo i, luego solo queda probar que $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ es una serie incondicionalmente convergente.

Consideremos un segmento arbitrario $\sum_{i=m+1}^{n}x_i$ con $m<n\in\mathbb{N}$, sea k un número tal que $m_k\leq m\leq m_{k+1}$ y sea $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección arbitraria de valores ±1. Entonces, utilizando la propiedad que establece que si $A\subseteq B\subseteq\mathbb{N}$:

$$\max_{\alpha_i=\pm1}\left\|\sum_{i\in A}\alpha_i x_i\right\| \leq \max_{\alpha_i=\pm1}\left\|\sum_{i\in B}\alpha_i x_i\right\|,$$

se deduce:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=m+1}^{n}\beta_i x_i\right\| &\leq \max_{\alpha_i=\pm1}\left\|\sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i x_i\right\| \leq \max_{\alpha_i=\pm1}\left\|\sum_{i=m_k+1}^{n}\alpha_i x_i\right\| \leq \max_{\alpha_i=\pm1}\left\|\sum_{i=m_k+1}^{\infty}\alpha_i x_i\right\| \\
&= \max_{\alpha_i=\pm1}\left\{\left\|\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\alpha_i x_i+\sum_{i=m_{k+1}+1}^{m_{k+2}}\alpha_i x_i+\cdots\right\|\right\} \leq \max_{\alpha_i=\pm1}\left\{\left\|\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}\alpha_i x_i\right\|+\left\|\sum_{i=m_{k+1}+1}^{m_{k+2}}\alpha_i x_i\right\|+\cdots\right\} \\
&\leq \sum_{j=k}^{\infty}\max_{\alpha_i=\pm1}\left\|\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}\alpha_i x_i\right\| \leq \sum_{j=k}^{\infty}3\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=k}^{\infty}3\,2^{-j} = 3\,\frac{2^{-k}}{1-\frac{1}{2}} = 3\,2^{1-k}.
\end{aligned}$$

Notemos que a medida que crece m, también lo hace k, luego por el criterio de Cauchy, tenemos que la serie $\sum_{i=m+1}^{n}\beta_i x_i$ converge para cualquier elección de los parámetros β_i, es decir, por el Teorema 4.7, concluimos que la serie que hemos construido converge incondicionalmente.

□

Observación. Notemos que en el enunciado del teorema de Dvoretzky-Rogers no se impone que la sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ tenga que verificar $\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty$. Por lo tanto, el teorema establece la existencia, en espacios infinito-dimensionales, de series incondicionalmente convergentes que no son absolutamente convergentes.

Concluimos esta sección con otro ejemplo clásico de serie incondicionalmente convergente que no es absolutamente convergente. Para ello, tenemos que definir una sucesión de funciones particular y estudiar algunas propiedades.

Definición 23. La *sucesión de funciones de Rademacher* $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de funciones:

$$\begin{array}{rccl} r_n: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & r_n(t) = sgn(\text{sen}(2^n \pi t)). \end{array}$$

Observación. Algunas propiedades de este conjunto de funciones son:

- La función r_n es una función escalonada que toma los valores -1 y 1 en intervalos abiertos de igual longitud y vale cero en los extremos de dichos intervalos. Más aún, en el primero de esos intervalos abiertos contados desde la izquierda de la recta real, la función vale 1, en el segundo vale -1 y así sucesivamente, hasta llegar al último intervalo, en el que la función vale -1; es por ello, que el número de intervalos en los que la función toma el valor 1 coincide con el número de intervalos en los que la función toma el valor -1.

- La sucesión de Rademacher $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortonormal en $L_2[0,1]$ (consecuencia no inmediata del punto anterior).

- Puesto que $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia ortonormal en el espacio de Hilbert $L_2[0,1]$, para toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y para todo entero positivo $m \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} a_n r_n \right\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{m} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Con todas estas propiedades, podemos considerar el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8. Sea el conjunto de funciones $\left\{\frac{1}{n} r_n\right\}$ y el espacio de Banach $(L_1[0,1], \|\cdot\|_1)$:

- En primer lugar, notemos que $\frac{1}{n} r_n \in L_1[0,1]$ puesto que $\int_0^1 |r_n(t)| dt = 1$ (el conjunto de puntos donde r_n toma valor 0 tiene medida nula).

- Tomando normas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{n} r_n \right\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

- Dados $m_1, m_2, k \in \mathbb{N}$ cualesquiera y coeficientes $\alpha_n = \pm 1$ arbitrarios, usando la desigualdad de Hölder y el punto tres de la observación anterior:

$$\left\| \sum_{n=k}^{m_1} \frac{\alpha_n}{n} r_n - \sum_{n=k}^{m_2} \frac{\alpha_n}{n} r_n \right\|_1 \leq \left\| \sum_{n=k}^{m_1} \frac{\alpha_n}{n} r_n \right\|_1 + \left\| \sum_{n=k}^{m_2} \frac{\alpha_n}{n} r_n \right\|_1 \leq \left\| \sum_{n=k}^{m_1} \frac{\alpha_n}{n} r_n \right\|_2 + \left\| \sum_{n=k}^{m_2} \frac{\alpha_n}{n} r_n \right\|_2$$

$$= \left(\sum_{n=k}^{m_1} \left| \frac{\alpha_n}{n} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=k}^{m_2} \left| \frac{\alpha_n}{n} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=k}^{m_1} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=k}^{m_2} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

  Tenemos por lo tanto, una sucesión de Cauchy en un espacio completo, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} r_n$ es convergente. Aplicando el Teorema 4.7 se deduce que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r_n$ es incondicionalmente convergente.

En conclusión, hemos obtenido otro ejemplo de serie incondicionalmente convergente que no es absolutamente convergente.

Bibliografía

[1] T. M. APOSTOL, *Matehmatical Analysis*, 2.ª ed., Addison-Wesley Publishing Company, 1981.

[2] S. ARSTEIN-AVIDAN, A.GIANNOPOULOS, V.D.MILMAN, *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, Mathematical Surveys and Monographs 202, AMS, 2015.

[3] M.I. KADETS, V.M. KADETS, *Series in Banach Spaces*, Operator Theory Advances and Applications, vol 94, Birkhäuser Verlag, 1997.

[4] J. MATOUSEK, *Lectures on discrete geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol 212, Springer, New York, 2002.

[5] V.D. MILMAN, G. SCHECHTMAN, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[6] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, 3.ª ed., McGraw-Hill International Editions,1987.

[7] D.J. SMITH, M.K. VAMANAMURTHY, *How Small Is a Unit Ball?*, Mathematics Magazine, 62:2, 101-107,1989.